

前沿科学探索书系

逻辑的语法

数学漫谈

百家出版社

[德]沃尔夫冈·布鲁姆 著　王国栋 朱坚强 译

Die Grammatik der Logik

Die Grammatik der Logik

逻辑的语法

数学漫谈

〔德〕沃尔夫冈·布鲁姆 著
王国栋 朱坚强 译

百家出版社

图书在版编目(CIP)数据

逻辑的语法:数学漫谈/(德)布鲁姆(Blum, W.)著;王国栋,朱坚强译.—上海:百家出版社,2001.12
(前沿科学探索书系/(德)本钦格尔(Benzinger, O.)主编)
ISBN 7-80656-420-9

Ⅰ.逻… Ⅱ.①布… ②王… ③朱… Ⅲ.数学-普及读物 Ⅳ.01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 063493 号

登 记 号 图字:09-2000-274 号
丛 书 名 前沿科学探索书系
书　　名 逻辑的语法——数学漫谈
编 著 者 [德]沃尔夫冈·布鲁姆
译　　者 王国栋 朱坚强
审　　定 戴鸣钟 何康炎
责任编辑 唐少波 丁翔华
封面设计 张　宁 梁业礼
出版发行 百家出版社(上海天钥桥路 180 弄 2 号)
经　　销 全国新华书店
印　　刷 商务印书馆上海印刷股份有限公司
开　　本 850×1168 毫米 1/32
印　　张 3.75 插页 2
字　　数 71000
版　　次 2001 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 7-80656-420-9/G·595
定　　价 10.00 元

导　言

仅仅是1996年和1997年的自然科学及技术出版物的数量，就超过了自有文字传播以来到第二次世界大战为止，世界上所有学者的相关著述的总和。如此大的知识量不仅使外行望而却步，就连专家也很难了解自身学科的全貌。在这种背景下，我们该如何确认哪些知识是有价值的，它们应怎样发展，会对我们产生什么影响？就显得尤为重要。因为正是自然科学与我们生活的各个方面息息相关，即便我们毫无察觉，但我们却无时无刻地要与它打交道。

本丛书旨在作为茫茫知识海洋中的航标，导引我们遨游自然科学和技术研究的最为重要的专业领域；文笔通俗易懂，重点放在基础性、关键性的知识和理论，并且自始至终刻意地省略了艰深的细节问题。

担纲本丛书写作的是一些杰出的科普作家，他们的日常工作就是用深入浅出的语言向人们讲解复杂深奥的科技内容。我感谢他们每个人，感谢他们对这一项目表现出来的自告奋勇精神和富有创造性的合作。

这本书引导我们畅游数学王国。从毕达哥拉斯（Pythagoras）到现代信息学，沃尔夫冈·布鲁姆（Wolfgang Blum）以十分轻松幽默的语言介绍了数论、逻辑学、求证、



概率计算、曲线分析以及计算的极限。论述的中心始终考虑到，数学以智力运算游戏为自身目标，而要注意自然科学的具体运用。因为正如伽利略所说："在数学语言中，其字母是圆、三角形以及其他几何形状，没有这些字母，人类就一个词也不懂了。"

奥拉夫·本钦格尔

目　　录

导言 …… 1

百年纪事 …… 1

从零到无穷 …… 9

数 …… 10

空间 …… 26

运动 …… 45

无穷 …… 52

概率 …… 59

最优化 …… 73

证明 …… 82

数学无处不在 …… 93

附录 …… 106

术语释义 …… 106

其他文献 …… 113

百 年 纪 事

“我想，这够了。”作报告人最后几句话的话音未落，英国剑桥大学的近 200 名听众站了起来并热烈鼓掌。虽然大多数人看不懂密密麻麻写满希腊符号和代数公式的复杂计算，但是所有人都明白：他们刚才经历了具有历史意义的时刻。来自美国普林斯顿大学的演讲者安德鲁·威尔斯（Andrew Wiles）成功地解决了一个百年来许多科学家都未能解决的难题：费马定理。

在 17 世纪的法国，皮尔·德·费马（Pierre de Fermat，1601—1665）从事的职业是律师，业余时间里他热心研究数学，不久后被视为业余王者。他使同时代的人神经紧张，因为他只告诉他们他得出的结论，而不说明他是如何得出结论的。据说这已包含在他写的内容中了。费马在古代由亚历山大城的迪奥方特（Diophant，约公元 300 年）所编的《数学》一书里的某一页边缘上，潦草地提出他的著名猜想。此外他还写道：“对于这个论断我已找到了绝妙的证明方法，只是页边太窄了，没法将它写在这里。”

这个绝妙的证明方法费马生前未加宣布。死后他的大儿子才公布了这个论断。此后几代数学家都对费马的页边记录表示怀疑，最后直到 1994 年威尔斯解决了这个



数学难题。他的证明立足于很多方法，直到20世纪下半叶数学研究中才用了这种方法。因此绝对可以排除费马可能已知道该种证明方法，或许他发现的是另外一种方法，而所有后来人都忽视了这种途径？绝有可能不是这样。大概费马和许多后继者一样都坚持着一种错误的逻辑观点。

数学中有许多未经证明的猜想，然而没有一种猜想延续了那样长的历史。许多猜想都不能为外行理解。与之相反，费马的陈述能让每个人了解。这是为什么呢？直到今天每个小学生都要学毕达哥拉斯定律。它适用于所有直角三角形：两股（直角边）的平方和等于弦（斜边）的平方，用公式表示为：

$$x^2 + y^2 = z^2$$

（x^2 表示 $x \cdot x$）

这个等式有许多解，如 $x = 3$，$y = 4$，$z = 5$。因为 $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ 或 $x = 12$，$y = 5$，$z = 13$，因为 $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$。如果不是平方，而是更高次幂，例如立方，等式 $x^3 + y^3 = z^3$ 也有许多不同于0的 x、y、z 解吗？（x^3 是 $x \cdot x \cdot x$ 的缩写形式）。$x^4 + y^4 = z^4$ 或者 $x^5 + y^5 = z^5$ 呢？用数学家的语言来讲：如果 n 为大于2的整数，等式

$$x^n + y^n = z^n$$

有 x、y、z 不同于0的解吗？（x^n 表示 n 个 x 相乘，x 上方的数 n 为指数）。费马的答案是否定的，但是关于不同



于0的 $n = 4$ 时的证明，只以页边注释的形式记在《数学》一书的另一处。

瑞士数学家莱昂哈德·欧勒（Leonhard Euler，1707—1783）在18世纪时，证明了 $n = 3$ 时的情况，几十年后又证明了 $n = 5$ 时的情况。这样也同时证明了所有指数为3或5的倍数时的猜想，因为这种情况下等式可以改写。例如 $x^6 + y^6 = z^6$ 改写为：

$$(x^2)^3 + (y^2)^3 = x^6 + y^6 = (z^2)^3$$

这样 $n = 6$ 时等式的答案也满足 $n = 3$ 时的情况。由于欧勒的证明，$n = 3$ 时无解，那么费马等式在 $n = 6$ 时也必定无解。

循此道路期望能作出普遍证明却未能实现。19世纪末，费马定理在数学中的地位几乎要像炼丹术在化学中的地位一样，作为一个过去时代的一种浪漫梦幻。然而这时出现另一种情况。问题在于一般几乎与世隔绝的数学界对数学的火热挚爱——以及对不义之财的蔑视。

达姆施塔特（Darmstadt）的实业家保罗·沃尔夫斯克尔（Paul Wolfskehl，1856—1906）向他的意中人求婚时遭到拒绝，他痛苦万分，决定自杀。这位上过大学以医生为职业的数学家，打算在午夜准时开枪自杀。午夜还未到来时他写好了遗书，整理了其他东西。然后为了打发时间，他开始在图书馆研究有关费马定理的论文。后来他忘记了时间，午夜过去了，于是他打消了自杀的念头，数学又唤起他对生命的热爱，为此他立即改写了遗

书。如果谁知道了挽救他生命的数学的谜底，可以获得他财产中的 10 000 马克——按现在的购买力约为 250 万马克。

从此以后，无数专业或业余的数学家们为此而拼命工作。受委托颁发此奖的哥廷根大学收到了无数的解答方案。同样其他大学的研究所也总是收到邮件。仅第一年哥廷根大学就收到了 621 个解答方案。大学里专门让人印刷了带如下内容的卡片：

敬爱的××

非常感谢您寄来证明费马猜想的稿件。第一个错误在__页__行，因此您的证明并无价值。

大学生们必须审查收到的邮件并填好预制的卡片。现在哥廷根大学有关费马的邮件已堆成像小山一样。大多数寄来的稿件均属低级水平，几乎只用了学校数学中学过的知识，提出进一步的证明。

现在在波恩马克斯-普朗克研究所（Max-Planck-Institut）从事数学研究的格尔德·法尔廷格斯（Gerd Faltings），至少在 1983 年获得了部分成就。他证明，对于任何 n 值费马等式最多有着有限的几个解。但是这个解的数目是 0 还是 10 亿个，按照猜想可并未说明。

到 1993 年，借助计算机，已成功地证明了所有幂小于 400 万时的费马定理。然而数学界认为问题并没结束，因为他们所谓的普通证明是指对于指数为任何值的



情况。毕竟幂更高时费马猜想也可能是错误的。在解决其他问题时曾出现过这种情况，阐述在头几个百万时有效，而几百万以上却不行了。例如莱昂哈德·欧伊勒(Leonhard Euler)曾有一次认为等式

$$w^4 + x^4 + y^4 = z^4$$

没有非零的整数解。200年中这个与费马猜想极为类似的猜想既没有被证明，也未被否定过。终于1988年哈佛大学的诺沃姆·埃尔格斯(Naom Elkies)得到了一个解：

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 21\,615\,673^4$$

威尔斯在剑桥作他划时代的报告之前，他已梦想了30年：证明费马定理。还只有10岁时他就沉湎于这个问题了："我特别喜欢做书本上有难度的习题。我把它们带回家后自己编新的题目。然而我还是在我们的小图书馆中找到了最好的题目。"这个小孩毫不犹豫地下决心要解答这个问题。他的老师以及大学里的讲师劝他别在不可能的问题上浪费时间，经过多次失败的尝试后他暂时搁置了他的计划。此后他在事业上取得了成功，并在美国著名的普林斯顿大学(新泽西州)任数学教授。

80年代中期(属于某世纪不作特别说明的，指20世纪，下同。一编者注)，几个数学家联合了起来，其中有埃森大学的格哈德·弗赖(Gerhard Frey)，他们以另一未被证明的猜想冲动了数学界：他们证明，费马论断是由所谓"谷山市村猜想"(Taniyama-Shimura-Vermutung)推导出来的。这样虽然这个问题还未被解决，但又有了新



的开端，可以继续推动研究。威尔斯闻悉后，立即以全部精力投入工作。“我非常激动，”他回忆说，“这时我非常清楚，我的生命历程会因此而改变，因为要证明费马最后一步项原理，现在我只需证明谷山市村猜想。我儿时的梦想将有所进展，而使一位严肃处事的人应怎样去工作。我不能放过这次机会。”而在他同事面前他只字未提“费马”这件事。他担心，如果他说出他未考虑成熟的想法会使别人在他之前获得荣誉。他只在蜜月旅行中将此事告诉了他的妻子。

这位英国数学家躲在他家的阁楼里进行研究。他的同事们猜想，他可能没有什么灵感了，因此他不再进行研究了。经过 7 年的艰苦工作，时正 40 岁，他终于觉得可以将结果公布于世了。在他看来，在他家乡剑桥的某个数学会议上宣布此事是最合适的。他对他的证明作了三次报告，他敲破了费马猜想这一硬壳，而且最后才宣告了其结果。之前，仍然流传着谣言。在作了最后一次报告后他将稿子交给几位专家。他们要检查是否有错误——这是科学中常见的过程。期间他亲自审阅了世界报刊的大字标题报道。

《纽约时报》甚至在首页上祝贺他的成功：“某人在这个城市的一个地铁站的墙上写着：$x^n + y^n = z^n$，无解——我发现了一个绝妙的证明，但我不能将它写下来，因为我要乘的火车来了。”

数星期后不幸的事发生了：普林斯顿大学的尼古拉斯·卡兹(Nicholas Katz)在他的论据中发现了一个严重



错误，这样证明就被推翻了。儿时的梦想成了噩梦，似乎已到达目的地了，却又得从头开始。他能修正由数百个带逻辑性结论构成的证明吗？

威尔斯钻进了阁楼。这次他开始相信一位同事了：他和他以前的博士生里夏德·泰勒（Richard Taylor）讨论论据中的漏洞以及该如何弥补它。终于在1994年9月19日——大约在错误出现后一年——威尔斯恍然大悟："真是太好了——太简单，太棒了！"他事后回忆说，"我才第一天回到了家，睡了一觉，丢开了此事。第二天早晨我又一次检查了所有的东西，然后下楼去找我妻子。'我找到了，我想，我找到了。'这太突然了，以至于她以为我指的是某件儿童玩具或类似的什么东西。她问我，'我到什么了？'我说，'我修改了我的证明。我成功了。'"

接下来的几个星期将他的想法整理誊清下来。虽然这份证明是按数学家们常用的简短形式写成的，还是写满了130张纸。自然外行们不懂这一大堆公式写了些什么，甚至那些对这个领域不太熟悉的数学教授们也不能理解他的论断。为了能看懂其论文，读者必须了解威尔斯的研究领域，甚至专业人员也要花数日才能看懂论据中的每一步。

在此期间，威尔斯的论文发表了，至今也还没发现任何错误。1997年，他在哥廷根获得了沃尔夫斯克尔奖（Wolfskchl）。受此期间通货膨胀的影响，该奖金贬值到了7万马克。不过钱对威尔斯来说是次要的："我对这个问题是如此着迷，以至于我8年时间里没想过其他事

情——从每天起床到上床睡觉。这次历险现在终于过去了，我的心灵该歇息了。”

从零到无穷

从什么时候开始有数学？是从古希腊人开始？还是古埃及人？或古中国？不，比这要早许多。可能在大约11 000年前，在扎伊尔爱德华湖的伊斯亨戈（Ishango）部落有人居住的时代就有了。如伊斯亨戈这样的野蛮部落人就是我们聪明的祖先，是他们迈出了理性思考的第一步。

考古家从伊斯亨戈那里挖掘出了人使用过的骨头制成的工具柄。柄上有许多刻槽。这些槽是成组排列的，各组之间间隔很开。在一处先有11个槽，然后是21、19、9个槽，另一处有3、6、4、8、10、5、5和7个槽，第三处为11、13、17和19个槽。这些数的排列顺序是否乃巧合？

这个骨头是数字系统最早的证据之一。当然在此只涉及到最简单的萌芽：一个槽代表1，两个槽代表2，等等，以此类推。不管我们觉得这个系统有多么的原始，但它绝非是理所当然的。直到今天还有许多部落的人像小孩一样，只知道开头几个数字，所有大于这些数字的数都被称为"许多"。

例如住在巴西中部的巴卡里人（Bakairi）称1为"tokále"，2为"ahága"。数下去时，他们就将它们结合起

来用"ahága tokále",大概表示为3。这样可一直数到6。数6以上时,就借助手指和脚趾。数大于20的数他们就扯自己的头发,口中念"méra, méra"。他们似乎想说:"比我头上的头发还多。"我们再仔细看看骨头上的刻槽:第一列中有11、21、19和9个槽,即10+1、20+1、20-1、10-1,这样是为了强调数字10吗?另一列中出现3、6、4、8、10、5、5、7。3和6挨得很近,隔了一大间隙后是4个槽,紧接着是8个,再隔一定距离后又有10、5和5,最后是7。他们已用2乘了吗?刻槽模型证明了这一点,但是7又是什么意思呢?

第三列为奇数。这一列有11、13、17和19个槽。它们都是那些只能被1和本身整除的数,即质数。而且还是介于10和20之间的质数。是巧合吗?我们不清楚,而且也无从知道。但有一点可确定,那些人已经没有多少时间来加深对数字的理解了。他们在骨头上刻槽后不久,爱德华湖边的火山爆发了。火山灰岩流向伊斯亨戈人的住处,并淹没了他们。

数

每个历史都有一个开端,数也是一样:毫无疑问不仅只有伊斯亨戈人发明了数,在不同的地方,数被不同的人发现。比伊斯亨戈人的骨头更清楚的最早的数学记载,来自埃及、美索不达米亚、中国和印度,可以追溯到4 000年前。按今天的标准来看,这些记载中的大部分都是属



猜谜游戏性质。

许多东西在被欧洲人发现之前数百年时就已被古中国人所知晓。《九章算术》记载了中国文化中的数学。该书的作者是谁，历史上无人知晓。随着时间的推移，这本书已被多次印刷，并添加了一些注释。目前留存最早的版本来自公元3世纪。书中有一个题目是这样的："如果直角三角形中一条边长为 a，另一条为 b，那么这个三角形的最大内接正方形的边长为多少？"

1985年的《数学教师》一刊也提出了相同的问题，殊不知这个问题在几个世纪前就被解答了。中国人令人惊讶的答案十分简单：最大内接正方形的边长等于直角三角形两直角边的积除以它们的和。而且中国人还求出了最大的内切圆，它的半径为 ab/(a+b+c)，其中 c 是三角形第三边（斜边）的长度。

从古埃及流传下来的最著名的著述是由阿默斯(Ahmus)于公元前1650年前在标特(Rhind)莎草纸上写成的。书中有一道有关骰子的题："一堆东西的数目加上它的1/7等于19。这堆东西有多少个？"显然这是要求一个数的值，该数与它的1/7的和是19。按现在的写法即下：

$$x+\frac{1}{7}x=19$$

x 代表所谓未知数：即所要求的值。阿默斯的答案为 $16\frac{5}{8}$，因为

$$16\frac{5}{8}+\frac{1}{7}\times 16\frac{5}{8}=\frac{931}{56}+\frac{133}{56}=19$$



大约在阿默斯时代是在巴比伦开始了汉穆拉比(Hammurabi)统治下的科学黄金时代。幸亏巴比伦人将东西记载在陶土块上，而不是写在莎草纸上，因为随着岁月的流逝，草纸很快分解。他们将楔形符号压入陶土块中，紧接着用火烧。巴比伦学者认识两种数字符号：一种类似于 T 的代表 1，另一种类似于<的代表 10。根据位置的不同 T 也可以代表 60，甚至代表 $60^2=3\,600$。与此相似的是，在我们的数字系统中根据位置不同，1 也可以代表 1、10 或 100。巴比伦人用 T<<<T 表示 91($=60+3\times10+1$)，T<<<TTTT<TT 表示 5 652 ($=3\,600+3\times600+4\times60+10+2\times1$)。

由于太阳在它的运行轨道上运行大约 360 天后又回到起始点，于是巴比伦人将圆分成 360 度。按他们的数字系统他们又将 1 度分成 60 分或 3 600 秒。这个 60 至今还保留着：60 秒等于 1 分钟，60 分钟等于 1 小时。

与此相反的是，埃及人、希腊人和罗马人不按数字符号的位置来区分数字。因为他们需要越来越多的符号来表示较大的数。这样就简化了较大的数相乘时的计算过程，因为这个过程可转化为各个数位之间的乘法。

而且古埃及人运用这样的窍门：如果两数相乘，他们将其中一个数始终除以 2(忽略可能出现的余数)，而将另一个数乘以 2。最后他们将乘 2 的数相加，与此所对应的分半之数是奇数：例如 9×26 时计算过程如下：

加倍	分半
~~9~~	~~26~~ (分半的偶数)



18	13
~~36~~	~~6~~（分半的偶数）
72	3
144	1
234	

$234=18+72+144=9\times(2+2^3+2^4)=9\times26$（其中 2^3 和 2^4 是 2 的乘方，是 $2\times2\times2$ 和 $2\times2\times2\times2$ 的缩写形式）我们可能认为这个过程太少见了，但如果没有结构完整的数字系统，这是一种求数的乘积的好方法。这种方法现在在亚洲的某些地区还很常用。

将数分解为 2 的乘方现在非常起作用。对计算机来讲，整个世界只是由数 0 和 1——断电和接通——构成。为表示所有的数，两个数字就够了。

为能用 0 和 1 来表示一个数，即用所谓的二进制来表示，人们将这个数拆分为 2 的乘方。在二进制中 0 当然是 0，1 表示 1，2 用 10 表示，因为 $2=1\times2^1+0\times2^0$（2^0 被定义为 1）。3 被称为 11，因为 $3=1\times2^1+1\times2^0$。表示 4 时我们就需要一个三位数 100（$1\times22+0\times21+0\times20$）。那么 26 就是 11 010（$1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$），99 写成 1 100 011。

人类的计算系统采用十个字符是出于以下原因：这是我们的手指数目。这个原理的运用是以每个整数为基础。十进制是在印度发明的，后来又传到阿拉伯。直到公元 1000 年左右，西班牙的摩尔人才将它带到了欧洲。现在我们还称之为印度-阿拉伯数。

质数——数学的基石

"一切都是数。"据说毕达哥拉斯曾于公元前6世纪这样说过。数字是原材料，自然科学中一大部分是由这块原材料铸造成的。数学中的许多东西也是围绕着数字的，当然并不是所有的都围绕着它。数字并不仅仅是数字，它分为不同的种类。

从所谓的自然数1、2、3、4…中就可以出许多难题，甚至有几个是至今未能解开的谜。最基本的问题之一是质数，即那些只能被本身和1整除的数：2、3、5、7、11、13、17、19、23…所有的整数都可以用他们来表示，这保证了数论的主要命题。按照该主要原理，除1以外的每个自然数可全以同一方式写成一组质数的乘积。例如50写成5×5×2。而且这是除了改变因子顺序以外，能将50拆分为质因数乘积的惟一可能性。不管是在斐济岛，在古希腊或在今后数世纪，都只可能有这一种拆分方法。

质数可比作化学中的元素或物理中的基本粒子。一个水分子由两个氢原子和一个氧原子构成。同样数字50也可以分成两个因子5和一个因子2。

只有92种天然化学元素，而质数的数目是无限的。这一点欧几里德(Euklid)在公元前3世纪就知道了。他关于存在无穷多质数的证明至今都被视为数学思维的辉煌成就。这个希腊人采用的是反证法：他假设最后只有几个质数，并由此得出的逻辑结论，直到出现了明显的矛



盾。这样必定有某个地方存在谬误。因为在推论中没有疏漏，那么只有可能是假设出错。因此必定有无穷多的质数。"返回到矛盾处，欧几里德很爱应用这点，是解决数学问题最好的武器"，英国数学家戈德弗雷·赫·哈蒂(Godfrey H. Hardy，1877—1947)评论说："它比象棋中舍卒以取得攻势的开局着法更精细，棋手可能会失去卒甚至某个棋子，而数学家常冒险作出研究。"

美国宾夕法尼亚州的数学家威廉·杜亨(William Dunham)称欧几里德的证明为数学敏感思维的检验方法：他使喜欢数学的人激动得流泪，使不喜欢数学的人厌烦。对匈牙利数学家保罗·爱尔德斯(Paul Erdoes，1913—1996)来讲这是一次重要的经历："当我 10 岁时，父亲向我讲述了欧几里德证明。从那时起我就开始了研究。"17 岁时他就已证明在任意一个数和它的 2 倍之间至少有一质数。在 3 和 6 之间有 5，10 和 20 之间有 11。按这个定律 10^9 和 2×10^9 之间也至少有一个质数。

爱尔德斯并不是第一个证明这个原理的人，但他比他以前所有人的方法都要简单。尽管在年轻时就已显示出了天赋，但在世事上却未受熏陶。他曾讲过他 21 岁时的经历："本来是喝茶时间，别人却给了我面包。我不知道该不该说我从未亲手给面包涂过黄油。我试着做了做，一点也不难。"

当然并不是所有的数学家都像爱尔德斯那样居无定所。他不停地周游世界。不管他到哪里，他总会认识些同行，他们将他接回自己家中居住并和他一起研究，这样

这位流浪数学家和合作者一起发表的论文比别人都多。

在当今的研究中质数还是很重要，科学家们一直在追寻新的成就。目前已知的最大质数是几十万位数。这简直太大了。估计宇宙中的基本粒子数目也只是 80 位

欧几里德的质数证明

假使存在有限多个质数，那么可以将它们列出，P_1、P_2、P_3、…、P_n，其中 n 代表有限个质数数目。欧几里德分析 $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n + 1$，现在这个数不可能是质数，因为它不存在于我们的列表 P_1、…、P_n 中，而这个列表应包括所有质数。这样这个数必须能被某个质数整除。即在 1 到 n 之间有一个数 i，使得 P_i 可以整除欧几里德设想的数 $P_1 \times \cdots \times P_n + 1$。当然 P_i 也可以整除乘积 $P_1 \times \cdots \times P_n$。由此得出：$P_i$ 也能整除差 $P_1 \times \cdots \times P_n + 1 - P_1 \times \cdots \times P_n$，这个差为 1，$P_i$ 必定能整除 1，而这是不可能的。因此我们的假设肯定错了，即存在无穷多个质数。这一证明也能提供一种方法，任意计算很多质数，可将前几个质数相乘后加 1 吗？可惜不能。虽然 $2 \times 3 + 1 = 7$，$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$，$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$，$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2\,311$ 是质数。但是 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30\,031 = 59 \times 509$ 时就不行了。



数。这些质数是用各种数学窍门和精心编制的计算机程序计算出来的。几乎每个已知的大质数都是特殊对象，即所谓的曼尔舍纳数。这个数是以法国的牧师、数学家马林·曼尔舍纳(Marin Mersenne，1588—1648)的名字命名的。它们可写成形式 2^n-1，即 n 个 2 相乘后减 1(n 代表任意这样自然数)，曼尔舍纳数并非都是质数，$2^2-1=3$，$2^3-1=7$ 固然是质数，$2^4-1=15=3\times5$ 却不是。当然曼尔舍纳也知道这一点，但这位牧师宣称，$2^{67}-1$ 是个质数。而 200 多年后，爱德华·鲁卡斯(Edouard Lucas，1842—1891)证明 $2^{67}-1$ 是合数。但他只是间接论证了这一点，而且没有明确给出它的因子。此外，他证明出 $2^{127}-1$ 是质数。并将这个最大的已知质数的记录保持了 70 年以上。1903 年弗兰克·纳尔逊·科尔(Frank Melson Cole)在某次会议上作了一个报告，事实上他演了一出哑剧：他没说一句话，将 2 乘 67 次，然后减 1。此后他在黑板上写了：

$$193\ 707\ 721\times761\ 838\ 257\ 287$$

并开始快速计算。他得出了与第一次计算时相同的结果：

$$147\ 573\ 952\ 588\ 676\ 412\ 927$$

接着观众致敬喝采。科尔解决了 $2^{67}-1$ 的问题，并将它分解成了两个巨大的因子。后来这位数论英雄承认，他已计算了 20 年。

几个使人惊讶的简单质数问题至今还未解决。如关于质数对的问题。质数对是指差为 2 的两个质数，如 7

和9，101和103。这种质数对的数目是无限的还是有限的，至今还没有人知道。而3个连续且公差为2的质数情况只有一种：3、5、7。其他的这种连续的奇数中总有一个能被3整除，因此它不是质数。

1742年，德国数学家克里斯蒂安·哥德巴赫（Christian Goidbach，1690—1764）在一封信中作了这个论断：任何大于2的偶数都可以表示为2个质数的和。尽管已借助计算机对100 000 000以下的偶数的哥德巴赫猜想进行了计算，但还没得到普遍证实。

目前数学中未解决的最著名问题，即以德国数学家伯恩哈德·黎曼（Bernhard Riemen，1826—1866）名字命名的黎曼猜想涉及的是质数的分布问题。

对于一个预先给定的（很大的）数，有多少个小于它的质数？在小于100万的数中有78 498个质数，在小于10亿的数中有50 847 634个质数。那对于任意一个给定的数所有小于这个数的质数公式应是什么？

从自然数到复数

即使在用自然数进行简单计算时数学家的机智也会有限：数学教授离开了教室时，该教室中有两个学生。过了一会，从这个教室走出来三个学生，几分钟后又进去了一个。于是教授说："可好了，现在教室又空了。"

将加法反过来叫减法，很快出现了问题，如果2减3时怎么办？这样自然数不够了。必须使用负数，负数和自然数构成了整个数列。尽管几乎没有一位商人使用负



数，但当他负债时负数就有了实际意义。

属于整数的还有零，直到中世纪它才在亚洲被“发现”，然后通过阿拉伯人传到了中欧。

全部数目均可相乘，如果我们想将乘法反过来，就是除法。2 乘以 4 等于 8，8 除以 4 等于 2。然而我们又碰到困难了：2 除以 3 等于多少？为此我们又需要新的数，即分数或有理数。整个数列都是属于这个范围，例如 3 就等于 3/1。

到这里已经很好了。现在我们可以用四种基本计算方法（加、减、乘、除）来计算。对于这些计算，有理数足够了，但是在解等式时下一个问题又出现了。

等式中可以通过由 x、y 或 z 表示未知数求值。例如在 $x+4=3$ 中，x 代表与 4 的和为 3 的数。即 $x=-1$。当等式为 $x^2=2$ 时，x 又是等于多少呢？这里要求一个数的值，它自乘等于 2。为解这个等式，有理数是不够的。这一点欧几里德早已知道。曾证明过 $x^2=2$ 时的解 x 不可能是分数，换句话说：2 的平方根，用符号表示为 $\sqrt{2}$，不是有理数。

大约在欧几里德之前 200 年时，毕达哥拉斯的学生希帕苏斯（Hippasus）就意识到必须有无理数。据说他为此付出了生命。当他在研究正五边形的识别记号时，他发现了无理数，并对此产生了浓厚的兴趣。他研究了圆形的对角线后发现，它的长度与边之间的比值很难计算。而对毕达哥拉斯来讲，数学的美在于整个世界可以用整数及整数之间的比值，即分数来解释。当他的学生希帕

欧几里德的证明

为了证明$\sqrt{2}$不是有理数，与证明质数有无穷多个一样，我们假设反命题成立，并由此推出矛盾，即2的平方根是有理数，那么我们就可以把它表示为分数：

$$\sqrt{2} = p/q$$

其中p、q是自然数。如果分数可以约分，我们通常约分至分子和分母都不再有公约数为止，即分数再也不能约分。现在我们将两边同时平方：

$$2 = p^2/q^2$$

并将q^2移至等式另一边$2q^2 = p^2$。所以p的平方是一个偶数。因为两个奇数的乘积还是奇数，这意味着，p必定是偶数。因此我们可以用$2m$代替p，其中m还是自然数，即p的1/2。代入等式，得出

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2，等式两边约去2$$

$$q^2 = 2m^2$$

即q的平方以及q都是偶数。这是不可能的，因为我们在选择p和q时，分数p/q不能再约分了。如果p、q都是偶数，我们还可以用2约分，这样就有矛盾了，即2的平方根可写成分数的假设必定错误。



苏斯告诉他 2 的平方根不可能是有理数时，他宁愿采用暴力也不愿改变他的世界观：他立即让人绞死他的学生。

为了能在数学系统中求解等式，我们添上了根——不仅只有平方根如$\sqrt{2}$，来计算所有二次、三次或四次或更多与自己相乘后等于有理数的数。$\sqrt[3]{3}$ 表示 3 的立方根，即一个 3 次与自己相乘后等于 3 的数(1.4422…)。$\sqrt[4]{9}$ 是 9 的四次方根，它是$\sqrt{3}=1.73205\cdots$ 的另一种写法，因为$\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=9$。

分数和方根一起构成所谓实数。它纯粹是数学家的头脑想出来的。事实上我们不会去区分一根棍子究竟是 $\sqrt{2}$ 米还是只有 1.414 213 5 米。1.414 213 5 也可写成 14 142 135/10 000 000，因此它是一个分数。$\sqrt{2}$ 这个非理数(或无理数)只有在精确到无穷位时才显出其特别之处——但这个只存在于思维之中。

黑暗的中世纪

虽然希腊人早已知道许多数学知识，但几世纪以来大部分知识都被欧洲人忘却了。责任在于罗马人，他们要求的知识具有实用性——正如至今有些批评家所要求的那样，他们只接受了最受古希腊人推崇的数学中可以直接运用的知识。他们惊讶于阿基米德的投掷机和杠杆起重机，除此以外的知识他们都认为是累赘，这样数世纪后许多知识就被遗忘了，直到文艺复兴时期——1 000 多年后——数学家才重新达到了古希腊人的水平。

泽内卡(Seneca,大约公元前4—后65)曾抱怨说:“我该停留在几何的尘埃上吗?我已远远离开那些有益的座右铭‘珍惜您的时间’,我该知道些什么?该抛开些什么?”在罗马并不培养数学家,罗马人智尽技穷时,他们便开始利用那些部分被当作奴隶看管起来的希腊专家。这样在公元前1世纪中叶受恺撒的委托,一位外国专家即来自亚历山大的苏西格纳斯(Sosigenes)参与编制了儒略历。罗马的智者们认为没有必要将希腊的原版文献译成拉丁语。他们只留下了那些在希腊语区广泛流传的所谓手册。这些书的作者大多为外行或写作匠。他们将知识简短归纳成书。那些还未经过多次简化和加工的古希腊后期的论文,如普托勒密(Ptolemäus,约100—160)关于天文学的论文却未被罗马人简化利用过。

罗马人也编制手册。手册的主要内容是些未经严格筛选的材料和缩略后的希腊文章的节选。这些作品中数学几乎从未出现过,他们的作者也很少注意论证乃至证明。他们宁愿引用那些著名学者的话,却不说明其来源,“已写下的话被视为绝对的权威”。历史学家威廉·施塔尔(William Stahl)评论说:“‘权威’这个词和‘作者’有相同的拉丁词根,这绝不是偶然的。”大多数罗马作家,如其作品曾影响中世纪的西尔索斯(Celsus,公元1世纪初)和普列尼斯长者(Plinins der Ältere,公元23—79),他们显然不能理解希腊的科学,不懂得区分荒诞的轶事和辉煌的理论。

直到这个黑暗时代末期,即13世纪时,西方国家那



些以前只了解拉丁传说的学者们才想起了希腊人的数学。这个时期最著名的教科书作者，出自比萨的莱亚纳多即称为费博纳西(Fibonacci，大约在 1200 年)之手，他在北非生活了 8 年。在阿拉伯国家，希腊的原版文献并没被遗忘。中东的科学家们继续发展了数学并建立了代数学，这个词来源于一本阿拉伯教科书的书名。他将东方的观念带到了意大利的教育中心。主要是由于他对家兔论述而被人记忆。他提问：如果假设一对家兔产下一对家兔，然后又产下一对后死去，那么每代会产生多少对家兔呢？在第一代只有 1 对家兔，第二代又生下来 1 对，在第三代又生下来 2 对(一对由第一对兔子所生，另一对由它们的后代所生)。第四代有 3 对(1 对由第二代兔子所生，另 2 对分别由第三代的 2 对兔子所生)。然后继续延续下去。第五代时有 5 对兔子，第六代有 8 对，第七代已有 13 对，第八代有 21 对。

数字 1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89…现在被称为费博纳西数。人们在花中却很少发现这些数：雪莲有 3 个花瓣，黄油花(Butterblume)有 5 个，翠雀花有 8 个，金盏花有 13 个，紫菀花有 21 个，许多雏菊有 34 个、55 个或 89 个。为什么会这样，科学家们于 1993 年才找到答案：由于开花期的发展。

观察越来越大的费博纳西数时会发现，相邻两个数的比接近于黄金分割值 $t=(1+\sqrt{5})/2=1.618\,033\,988\,749\cdots$ 这个值与黄金分割关系密切。从古代起黄金分割就被视为线段的和谐比，并在艺术和建筑学中得到广泛运用。

黄金分割将一个线段分成两个部分，较长部分与线段总长的比值等于较短线段与较长线段的比值。如果总长为1，那么较长的线段就为黄金分割值的倒数1/t。

虚　　数

古希腊人认识所有的今天常用的数吗？不。因为等式 $x^2=-1$ 的解他们并不知道。负负得正，正乘正还是得正。那什么数自乘后得－1呢？如果我们想解这样的等式，我们又需要新的数，即所谓的复数。伟大的德国数学家卡尔·弗里德里希·高斯（Carl Friedrich Gauß，1777—1855）是最早将复数建立在可靠的逻辑基础之上的人。每个德国人手上一定都有过高斯的头像：它印在10马克的纸币上。

最早苦思研究这些奇特数字的人必须忍受侮辱。当时人们认为，这种数不可能存在。从事这方面研究的人一定疯了。但所有的时代先锋都会受到嘲讽的。刚采用复数时，某些同时代的人也嘲笑过－2个骆驼，就像当初用分数时嘲笑2/3个骆驼一样。尽管说到平均每个德国家庭有1.68个孩子时还会引人微笑，但这两种数现在都已被普遍接受了。

复数首先是为了使等式有解而设想出来的奇怪的东西，现在它已被广泛运用，而且不仅在数学中，在物理和电子工程方面也常用复数。

复数的基础是所谓的虚数单位，它指的是那个自乘等于－1的数。这个数简称i。人们不应多想它的性质，



而只要接受它的定义就行了。

为了一贯起见，复数应包括实数并且具有特殊的加法和乘法：如果将两个复数相加或相乘，所得的结果必须仍为复数。相应地 $2\cdot i$ 或 $(4/3)\cdot i$ 是复数，$2+i$ 或 $4/3-i$ 也是复数。

复数由实数和虚数两部分构成。它可写成 $a+i\cdot b$ 的形式，其中 a 和 b 是实数；i 是虚数单位。a 或 b 也可能为 0，这样实数都是复数，它们的虚数部分为 0。

复数相加是分组进行的：

$$(a+i\cdot b)+(a'+i\cdot b')=(a+a')+i\cdot(b+b')$$

a，b，a'，b' 代表任意实数。作减法时，可把它视为负数相加，方法同加法时一样。求积时按如下规则：

$$(a-i\cdot b)\cdot(a'+i\cdot b')$$
$$=(a\cdot a'-b\cdot b')+i\cdot(a\cdot b'+a'\cdot b)$$

复数加法的定义很容易理解，而乘法的定义乍一看时似乎有点特别。其实只要将左边的数按常用的带括号时的乘法规则计算，并按一定定义将 $i\cdot i$ 用 -1 代替，就得出结果了。

用这个扩展数的概念等式 $x^2=-2$ 有一个解 $x=i\cdot\sqrt{2}$。而且并不是只有这个等式有解：在复数中带幂的未知数，只要有加减法的等式都有解。已由高斯证明过的代数的基本定理证明了这一点。一种使复数更直观的方法带上了这位伟大的科学家的名字：高斯数学平面。

每个中学生都学过数轴——它是一条规定了零点

的直线，线上其他点按离零点的距离不同来区分。例如3表示零点右侧距零点有3个单位长度的点（为毫米、厘米或公里）。－4表明零点左侧四个单位，如果两条这样的数轴互相垂直并交于它们的零点，它们就构成了一个平面。平面上每个点都可用数对来表示，如(3，2)表示沿第一条直线方向距交点3个单位长度，另一条直线方向距交点2个单位长度的点。所有复数都可在高斯数学平面上找到对应点。数 $a+i\cdot b$ 与点 (a, b) 相对应。

如果再加上一条与两条数轴分别垂直且相交于零点的数轴，便可得到三维空间。空间中每点都可用三个数表示，如(3，－2，4)。原则上讲，在更多位空间也可进行同样的游戏。尽管这些超出了我们的想像力，但数学家们决不会放弃研究它们的。他们甚至在无穷多维空间面前也未退缩过。

相互垂直的数轴叫笛卡尔坐标系。它将数与空间连在一起，使得人们能计算空间图形，或通过画图来解决计算问题。

空　间

据估计，数学家们对空间的研究与对数的研究有同样长的历史。现在每个中小学生没有一个人不学几何(Geometric，古希腊语中Geo指土地，metria指计量)。还在古希腊罗马时代几何就具有最实际的意义——用于



测量土地。

中国人和埃及人早已研究几何学，如今被视为希腊数学的一些知识他们很早就发现了。例如我们已提到过那些著名的毕达哥拉斯定理。按这个定理直角三角形斜边（与直角相对的边）的平方等于两股（夹直角的两边）的平方和——简写为 $a^2 + b^2 = c^2$。

几乎没有一个数学定理像毕达哥拉斯定理有这么多的证明方法。20 世纪初就出版过一本声称有 367 种证明 $a^2 + b^2 = c^2$ 公式的不同方法著名的书。许多煊赫的名字都在这些公式的推导人之列，如欧几里德、达芬奇（1452—1519）、叔本华（1788—1860）、前美国总统杰姆斯·亚伯拉姆·加费尔特(James Abram Garfield，1831—1881)和爱因斯坦（1879—1955），爱因斯坦还是中学生时就认为欧几里德的证明无需这样复杂，自己思考出简捷的证明方法。丹麦童话作家安徒生居然将欧几里德的证明写成了诗。

1821 年的一个建议证明了“老毕达哥拉斯”的文化意义，当时只能靠望远镜来观察宇宙空间的情况。许多人认为，月球上有人居住。为了向地球外的人表明地球上住着有理智的聪明人，人们用很大的庄稼地来描绘这个定理。因为人们认为，每个聪明人都该知道这个定理。近年巧克力广告也用过这个定理。

有些历史学家怀疑来自萨莫斯（Samos）的毕达哥拉斯，是否真的是第一个推导出这个以他名字命名的定理。关于他一生和作品的原始材料并不存在，他的神话和传

奇却有很多。据说他生活在公元前 6 世纪，而且在无数次去埃及、巴比伦的旅行中找到了灵感。许多人认为他是数论和数学历史上第一个黄金时代的创始人，持怀疑态度的人认为这个带神秘色彩的毕达哥拉斯根本不存在。

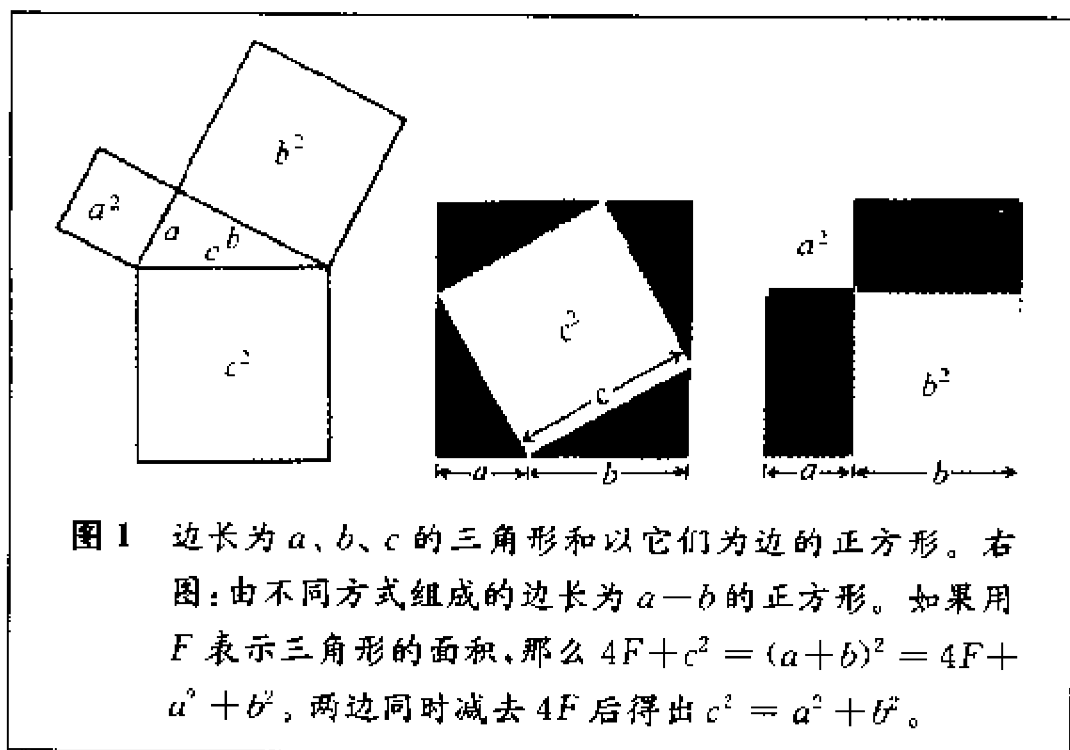


图 1 边长为 a、b、c 的三角形和以它们为边的正方形。右图：由不同方式组成的边长为 $a-b$ 的正方形。如果用 F 表示三角形的面积，那么 $4F+c^2=(a+b)^2=4F+a^2+b^2$，两边同时减去 $4F$ 后得出 $c^2=a^2+b^2$。

也许在希腊的学者认识世界是前古代中国人已知道这个定理了。他们用一种七巧板证明过：边长为 $a+b$ 的正方形，可以由边长为 c 的正方形和 4 个边长分别为 a、b、c 的三角形构成；或者由边长为 a 的正方形，边长为 b 的正方形，和四个边长为 a、b、c 的三角形构成。如果减去两种拼接图中相等的四个三角形的面积，就得到了毕达哥拉斯定理。在一本古印度的书中这个定理的证明只用了一幅图，图下写了一个词“请看”。



完美的圆形

古希腊人曾被圆这一完美的形状深深吸引过。圆周上所有点到圆心的距离都完全相等——民主制度绝妙的典范！古希腊人已发现，不管是大圆还是小圆，其周长与直径的比值都是一定的。现在表示这个比值的符号与希腊字母表中第16个字母Pi读音相同，写为π。但希腊人们已用的π不是这个意思。

如果一个圆的周长为U，直径为D，那么$U/D=3.14159\cdots$，把D移到另一边得到著名的公式：

$$U=\pi\cdot D$$

人们也常看到$U=2\cdot\pi r$。其中r为半径，它表示圆心到圆周上一点的距离。这两个公式可以互相转化。因为直径等于半径的2倍。圆的面积用半径r表示为$F=r^2\cdot\pi$。

从西勒库斯(Syrakus)来的阿基米德(Archimedes，前287－前212)已很精确地计算出了π的值。这个据说为了在任何时候都能画出数学圆形，因而总是带着一个小沙盒的学者在圆内画上内接正多边形，逐步增加多边形的角，这些角都在圆周上。这时多边形的周长越来越接近圆的周长。最初阿基米德在圆内画了4个四角都在圆周上的正方形。

因为大小并不重要，我们可以设圆半径为1，那么正方形的对角线等于2，即等于圆的直径。因为对角线与

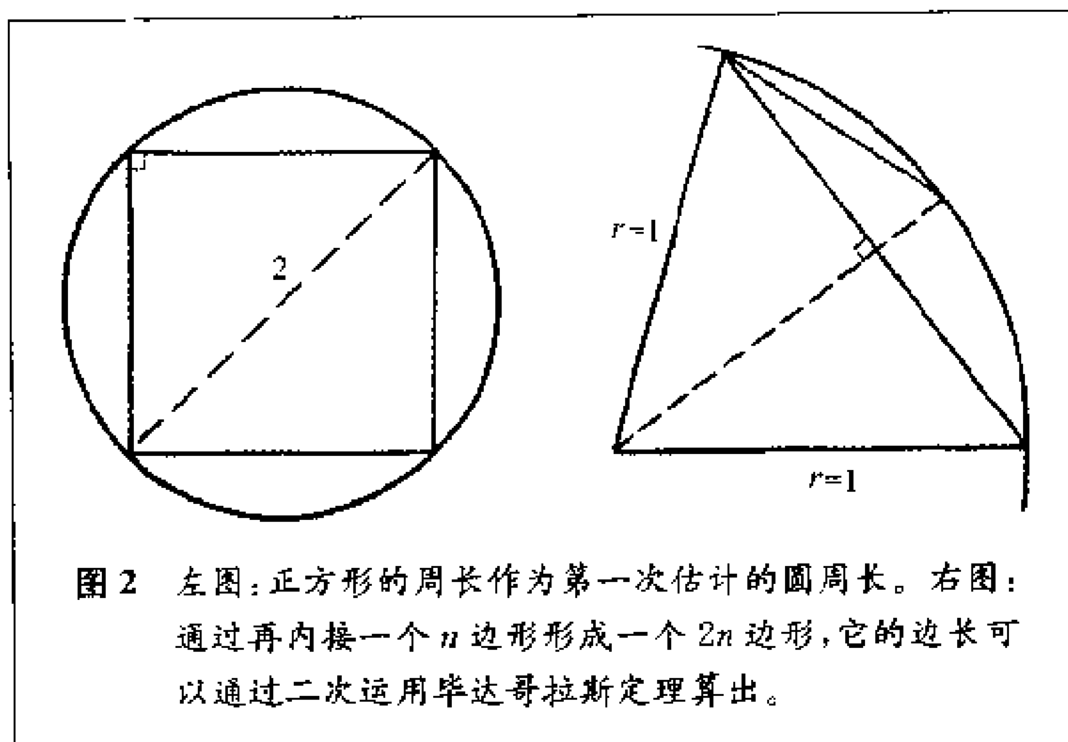


图 2 左图：正方形的周长作为第一次估计的圆周长。右图：通过再内接一个 n 边形形成一个 $2n$ 边形，它的边长可以通过二次运用毕达哥拉斯定理算出。

正方形的两边构成直角三角形；所以正方形的边长可以由毕达哥拉斯定理求出：$s^2+s^2=2^2$，推出 $2s^2=4$，由此得出 $s=\sqrt{2}$。第一个相当粗略的估计 π 值为正方形周长除以圆直径：

$$\frac{4\cdot\sqrt{s}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2.828\,427\cdots$$

阿基米德下一步在圆中正方形每个相邻角之间增加一个角。这些角与正方形的角相连后得到一个八边形，它的周长又可借助毕达哥拉斯定理求出。这样可以形成带有越来越多边长多边形，它的轮廓在圆内越来越向圆靠近。用这种方法可以求出圆的面积。阿基米德计算了一个 96 边形的周长并因此得出了一个十分接近 π 的值。当然借助计算器或计算机我们可以求出更接近 π 的值。



要准确计算宇宙的周长直到氢原子的半径只要将 π 精确到小数点后 36 位就可以了。在此期间数学家们已用其他方法得出小数点后带 10 亿位数的 π 值。圆周率可由下列公式求出：

$$\pi = 4\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots\right)$$

我们不可能知道 π 的最精确值，因为它是一个无理数。它不能表示成分数，而且在小数点后有无穷多位数，这些数的排列也没有什么规则。

古希腊人经常使用圆规和直尺。对他们来说这两个工具是解决几何问题的钥匙：直线和圆。他们几乎只使用这两种工具。这样总有不足之处。几世纪以来，学者总是想只用圆规和直尺将任意角分成三等分。直到 19 世纪，这种想法的无效才显露出来：皮埃尔·劳伦特·汪策尔（Pierre Laurent Wantzel，1814—1884）证明，不可能只用圆规和直尺将一个 60 度的角分成 3 等分。

这个法国人将问题转化为代数题，他推断出，如果可以进行 3 等分，那么等式 $x^3-3x-1=0$ 必有有理数解。接着他又证明，这是不可能的。这样就彻底清楚了：没有人能总是借助圆规和直尺将一个 60 度的角三等分，然而直至今天，还有人宣称他只利用这两种工具完成了角的三等分。

在古希腊人借助圆规和直尺解决的问题中还有另外两个也是不可能的：求圆的面积——即由一个圆制成一个面积相等的正方形——以及二倍体积的正六面体——

即通过一个正六面体画出一个二倍体积的正六面体。另外一个问题高斯在 18 岁时已解决了：画出一个正 17 边形，当时人们认为这个问题比角的三等分还难。

现代数学的原始爆炸

欧几里德在他 13 册的作品《要素》中，关于几何的系统描述是现代数学的原始爆炸。这本书——大约写于公元前 300 年的亚历山大——由于记载了 465 条命题或原理被视为最优秀的数学教科书。从古代起这本书就被一再重新出版。它是印刷次数最多的科学作品。“如果欧几里德未能唤起您年轻的热情，那么您注定不会成为科学家。”据说物理学家爱因斯坦曾这样讲过。瓦森（Watson）博士在称赞他上司、著名的夏洛克·霍尔麦斯（Sherlock Holmes）的敏锐洞察力时曾说：“他的结论和欧几里德的许多命题一样不可置疑。”

在这本书中欧几里德不是用无数图形，而是公理来阐述平面几何的。一开始他就假设一些他认为有效的（必然）的特征并以它们为前提条件。例如其中一个特征是：过任意一点与另外一点可作一条直线。由这些公理他推导出了所有其他公理。这样欧几里德第一次提出了当今的数学思维方法：先作一个基本假设，且以后不再对此提出疑问，从这个假设出发，就可以求证许多命题，发现许多互相关联的东西。

几百年来人们对欧几里德的第五条假设一直都有争议。这条假设的内容是：对于一条直线 g 和一个不在直



线上的点 p，正好有一条通过 p 且不与 g 相交的直线(平行线)。许多数学家都希望能由最初四个定理推导出这一定理。但是他们的希望破灭了：从 17 世纪起，不少科学家都提出一种从欧几里德的前四个定理为基础而否定第五个定理的几何。确切地说，他们甚至得出了两种非欧几里德式的几何：双曲线的和椭圆的几何。人们可以将椭圆几何设想为球面几何：我们观察的不是直线，而是球上带最大直径的圆；不是一对点，而是由在球上正相对着构成的对点。由于两个大圆总是相交的，所以平行线定理不成立。尽管如此，几何本身是严密的。与之相反的是，在双曲线几何中对于一条通过一点的直线存在许多平行线。它使用类似于椭圆几何中的方法，且直观观察。人们不是观察球面，而是观察一个似陀螺形状的表面。虽然双曲线几何开始时是由纯粹的数学内部原由发展起来的，但它在自然界中也可以找到，这一点在 20 世纪初已得到证实。爱因斯坦在他的广义相对论中将双曲线集合视为空间—时间几何。

分数几何

现在欧几里德几何又有了新的对手，即分数几何，它是研究混沌的现行研究。实际上根本不存在欧几里德图形。云不是球形的，山不是锥形的，树皮不是光滑的。这些常识促使贝诺·曼特尔勃洛(Benoit Mandelbrot)找出另一种更好描述自然界的几何。这位很久以来一直生活在美国的法国籍波兰裔数学家找到的普遍规律是本身相

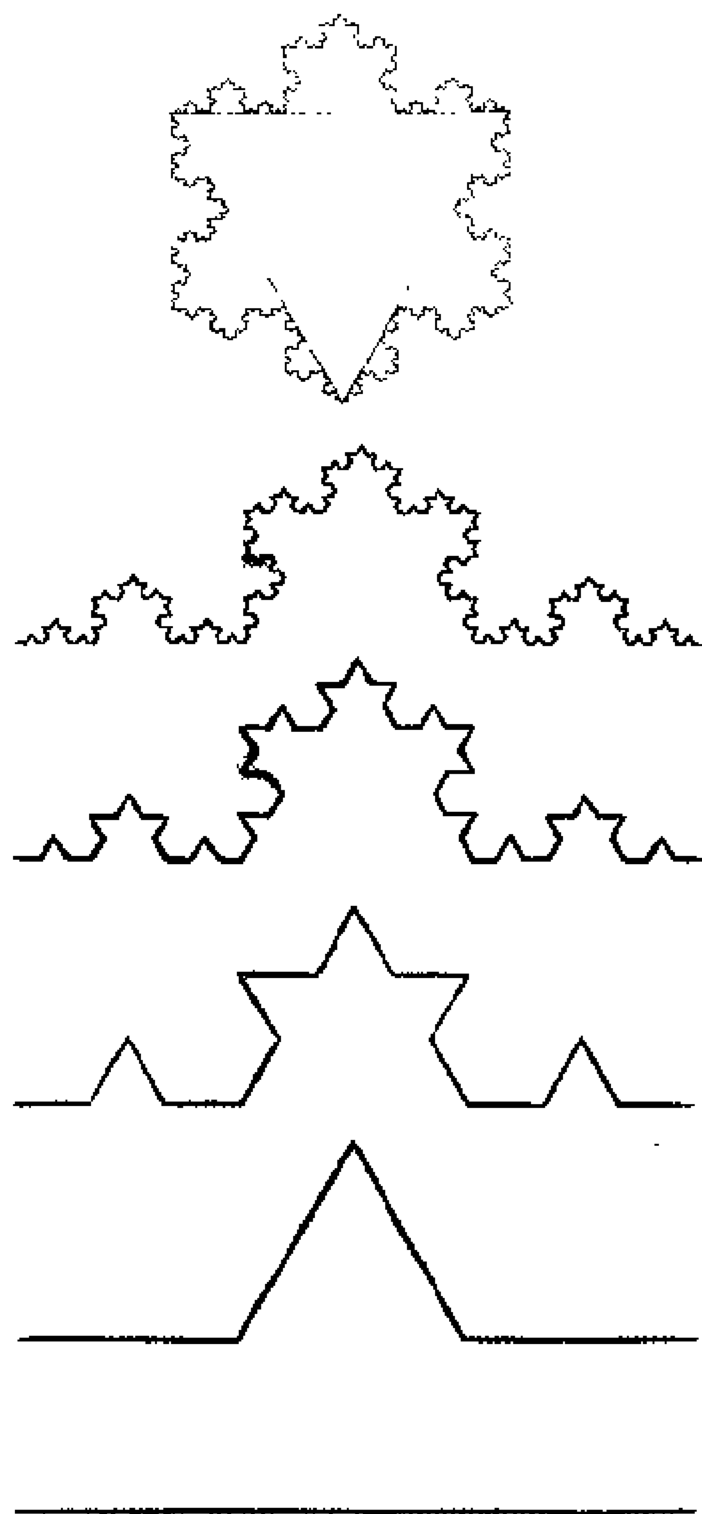


图3　这条雪花曲线的最初形状是一条线段，如果按照相同的规则不断增强齿型就形成了这条曲线。



似性。自然界中这种相似性随处可见：如果不考虑大的差别，树枝相似于整棵树，小树枝相似于大树枝，树叶上的叶脉相似于小树枝。山脉与岩石相似，岩石与石块相似，石块与沙砾相似。行星围绕太阳就像电子围绕原子核一样。分数几何中图像就在于它们自己都很相似。

欧几里德几何的图形如直线、圆或圆锥可以用完整语言来定义，而分数几何图形却不能。它们形成于生长过程中，因而它们与光滑的欧几里德图形相比更接近自然。

虽然分数几何图形被视为计算机时代数学成就的象征，但在大约100年前科学家们就已构思出了其中的几个图形。但是他们当然不能在屏幕上赞赏本身缠绕的形状美感，而且没人宣称用这些图形能描绘自然。那些前辈们把这些图形视为“数学怪物”。这些科学家，在系统研究基本概念如稳定和弯曲时，研究了分数几何。这一词汇也在1975年始由曼特尔勃洛定名。

为了构成分数几何图形，人们今日与过去那样一直使用由直线变曲线的方法：初始形状是一条直的线段，然后按一定规则使之变成曲线，再按同样的规则改变曲线。例如雪花曲线的第一步是直线段中间的1/3变成了齿形。接下来的步骤是将得到的图形中每条直线段中间的1/3替换成齿形。经过无数次重复后就得到了一条名副其实的曲线。以前用这种由直线变成曲线的方法很繁琐，形成的曲线也不具美感，而计算机的强处就在于它能以十分快的速度机械地重复同一个指令。它使分数几何



的世界更直观了。然而电子计算机也只能处理有限多个命令，这样生成的图形只是一种相似。完美的雪花曲线只存在于思维中。

扩大这个曲线中的任意一小段都会得到相同的曲线。因此它具有完全的自身相似性。而在纸上画的由有限多个齿和构成的曲线不具备这种性质。线上终有可能非常小的一段——由直线构成，因而不能放大成与整个曲线完全相同的曲线。

用类似的方法可以同时改变整个经典的分数几何图形。为了更好演示各种过程，需要介绍“多次缩小复印机”。这种简称为 MVK 机的仪器能将各种图形复制成若干个按一定规则排列的缩小图形。例如用于雪花曲线的 MVK 机会将置入的图形复制成四个大小为原来 1/3 的图形。复制的第一个图形与原始图形起始点相同，第二个起始于第一个的末端，并旋转 60 度；第三个又起始于第二个的末端并旋转 270 度，最后第四个图形与原图相比只推移了 2/3。另外一个 MVK 机有 3 个透镜，它们每次将图形缩小 1/2。三张复印图是以三角形排列的。由机器输出到纸上，经过无数次复制后都会得到相同的结果，即一个以波兰数学家瓦克拉夫·西尔平斯基(Waclaw Sierpinski，1882－1969)名字命名的带孔三角形。甚至西尔平斯基三角形完全自身相似。每个甚至很小的三角形是和整个(缩小后)结构完全一样。

一次掷骰子游戏，所谓的混沌游戏也可以形成西尔平斯基三角形：在角为 A、B、C 的三角形上任选一个始



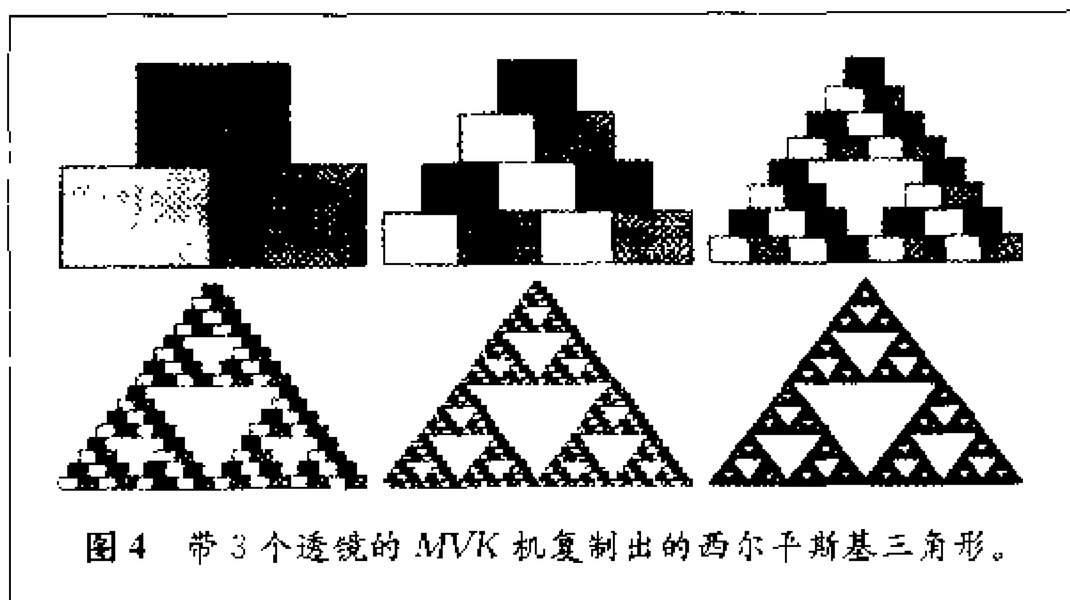


图4 带3个透镜的 *MVK* 机复制出的西尔平斯基三角形。

点 X。骰子为1或4时，将 X_0 朝 A 方向移动至中点，并在此标上 X。骰子为2或5时，朝 B 的方向移动一半的距离，当骰子为3或6时，朝 C 移动。下一轮时，X_1 是新的始点，而且按照同样的规则掷骰子，移动多少步后达到三角形中的某点呢？使用一次西尔平斯基型 MVK 机器后，在三角形中所有的点都可能留存。在移动 n 次后，分别根据始点及掷投机遇，在使用 MVK 机后所制成的很多小三角形中，终有一次落在其中的一个，但绝不可能在已出现的孔中。这个游戏可以不通过反复掷骰子，而是在计算机上加以模拟。游戏无限长时，会形成西尔平斯基三角形——掷骰子游戏和分数几何之间有着惊人的关系，在没有偶然特殊情况影响下且按固定规则形成的。

如果 MVK 机的透镜不仅将原图作直线缩小，而且还使图形歪曲，这个理想的仪器可以制出奇妙的图案。一个比较简单的带4个透镜的 MVK 机就可以复制出与真的实图一模一样的蕨类植物，若按欧几里德几何这些

图形就很难得出。但蕨类植物和分数几何也有一点是相同的:开始时两者只有一种结构图。植物是有其遗传形式的。选择 MVK 机确定图形,其轮廓是后来才慢慢形成的。

尽管比例尺不同,但是山脉、云海、海岸线总会出现类似的图形,不过并不与经典的分数几何的缠绕图完全一样。为了复制出一致的图形,数学家,信息学家以及艺术家们将若干个 MVK 机在计算机中连在一起并任意选择,在哪一次重复后使用哪一种透镜系统。他们用这种方法制作出了分数几何地形和所有的星体,例如在电影《星球旅游 2》中可以多次欣赏到。

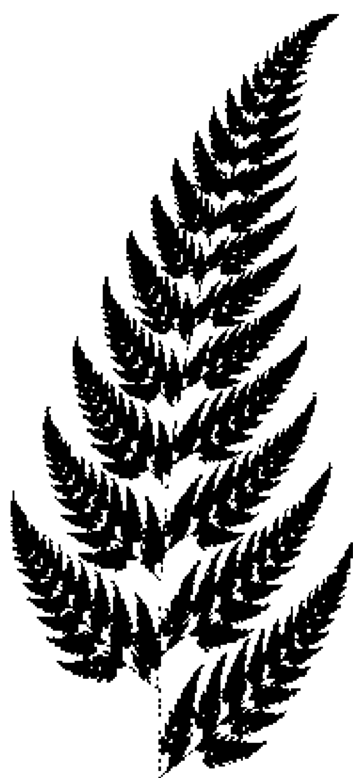


图 5 用 MVK 机可以复制蕨类植物一模一样的图形。



英吉利海岸有多长

现代分数几何从诞生起不仅只用于制作回纹型的曲线和平面，而且还用于测量。曼特尔勃洛于1967年在美国科学杂志《科学》上发表了一篇名为“英吉利海岸有多长”的文章，这位分数几何的创始人的答案是：这与比例尺的大小有关。测量者的考察越仔细，出现的海湾和凸出部分就越多，它们的边长必须算在海峡长度内。事实上，不同的百科全书给出了介于7 200公里到8 000公里的值。曼特尔勃洛评论说：“自然形状和模型实际上并无特征的长度。不来梅大学的海因茨·奥托·培特根(Heinz-Otto Peitgen)和他的合作者们用圆规在地图上测过英吉利海岸的长度。当圆规角间的距离表示为500公里时周长为2 600公里，而距离为17公里时，结果是8 640公里。在比例尺无限小时，海岸长度居然增长到接近无穷值了。在这点上海岸线就与欧几里德几何形状有基本差别。尽管比例尺缩小多少，圆的周长总是等于π乘以直径。培特根按与测量英吉利海峡一样的方法求直径为1 000公里的圆的周长。如果圆规调节到了500公里，周长就为3 000公里，调节到了17公里时，周长为3 141公里。

即使经典的分数几何曲线也没有最后的长度。如在制作雪花曲线时每重复一步，齿形图都比前一步长1/3。由于这个过程常是一直进行下去的，所以长度是无限增加的。雪花曲线和英吉利海岸都不会完全盖住任何一小块面积。因此这两分数几何面积太大，而不能有一维的

长度，但是对于二维的面积来讲，他们又太小了。而欧几里德图形总可以具有一个尺寸：直的线段和圆周有一维（有限）的长度，正方形和三角形有二维的面积，球和锥有三维的体积。为了仍能表示分数几何图形的大小，大约在 80 年前数学家们就采用了分数（小数），如 1.26 或 1.81，作为一种尺寸。由此产生了分数几何（fractus，拉丁语中的意思是不完整的）。在曲线的情况下，尺寸数目随比例尺愈来愈小时会无穷地增长。期间有不同的措施，对分数尺寸予以界定。在几个图形中是一致的，但是在其他的图形中就并不一致。方法不同，英吉利海岸的尺寸比值介于 1.3 和 1.4 之间。

尤莉亚集合

每个复数 c 都有一个尤莉亚集合（Julia-Menge）J_c。首先以 z_0 为初始数，按简单的计算规则，确定 z_1。再按同样方法以 z_1 为初始值求 z_2。然后以 z_2 为初始值，继续计算下去。这样最后就可以形成无穷数列 z_0、z_1、z_2、z_3…。

所应用的计算规则是：将初始值平方后，加上 c，c 是选定的复数。第一步得出 z_1 为 z_0^2+c。

众所周知，复数可解释为坐标平面上的一点。复数 $z=a+i\cdot b$ 与坐标(a,b)确定的点相对应。现在数列



z_0、z_1、z_2、…有两种可能性:要么就是越过所有界限发展,也就是说,在高斯数学平面上,于任意大小的圆上,数列在零点上离开。或者它们是有范围的,这样就有一个包围数列区域。对于选定的值 c,复数数学平面分成了两个部分:逸量,它包括所有始点,并无限增大;以及所有始点的捕量,其次序存在于有限区域内。两个集之间的界限就是值 c 的尤莉亚结合,符号为 J_c。c 为 0 时,数列为 z_0、z_0^2、z_0^3、z_0^4…。如果 c 为大于 1 或小于 −1 的实数,数列的项会增大到超出所有范围,因为在每次重复时,其项离零点就越远。如果 $z_0 = 2$ 时,数列为 2、4、16、256、65 536 …。z_0 的值介于 −1 和 1 之间时,数列的项逐步接近于 0。$z_0 = 1/2$ 时,数列为 1/2、1/4、1/16、1/256、1/65 536…,数 −1 和 1 位于越来越大和接近于 0 的数列的界限上。因此它们属于尤莉亚结合 J_0。若 z_0 为复数,如果 z_0 在高斯数学平面内离零点的距离不超过 1 单位长度时,即在圆心点,半径为 1 的圆内时,那么数列是有限的。J_0 是一半径为 1 的圆。大多数其他尤莉亚结合的形式十分奇怪。

每个复数有一个尤莉亚结合 J_c。对于有些 c 值,J_c 是相连的,对于其他值,数量分散为星点。曼特尔勃洛量指出,那些尤莉亚量并无隔离地区。曼特尔勃洛量已含坐标(a, b)的所有点。当 $c = a + \mathrm{i} \cdot b$ 时,J_c 是相关联的。

圆胖矮人

雪花曲线和西尔平斯基三角形特别适用于解释分数几何的原理。而新数学学科的标志却是另一种图形，即曼特尔勃洛量也被称为圆胖矮人(图 6)。准确地说，肯定不是分数几何图形，只是它的边缘。大约在 20 年前曼

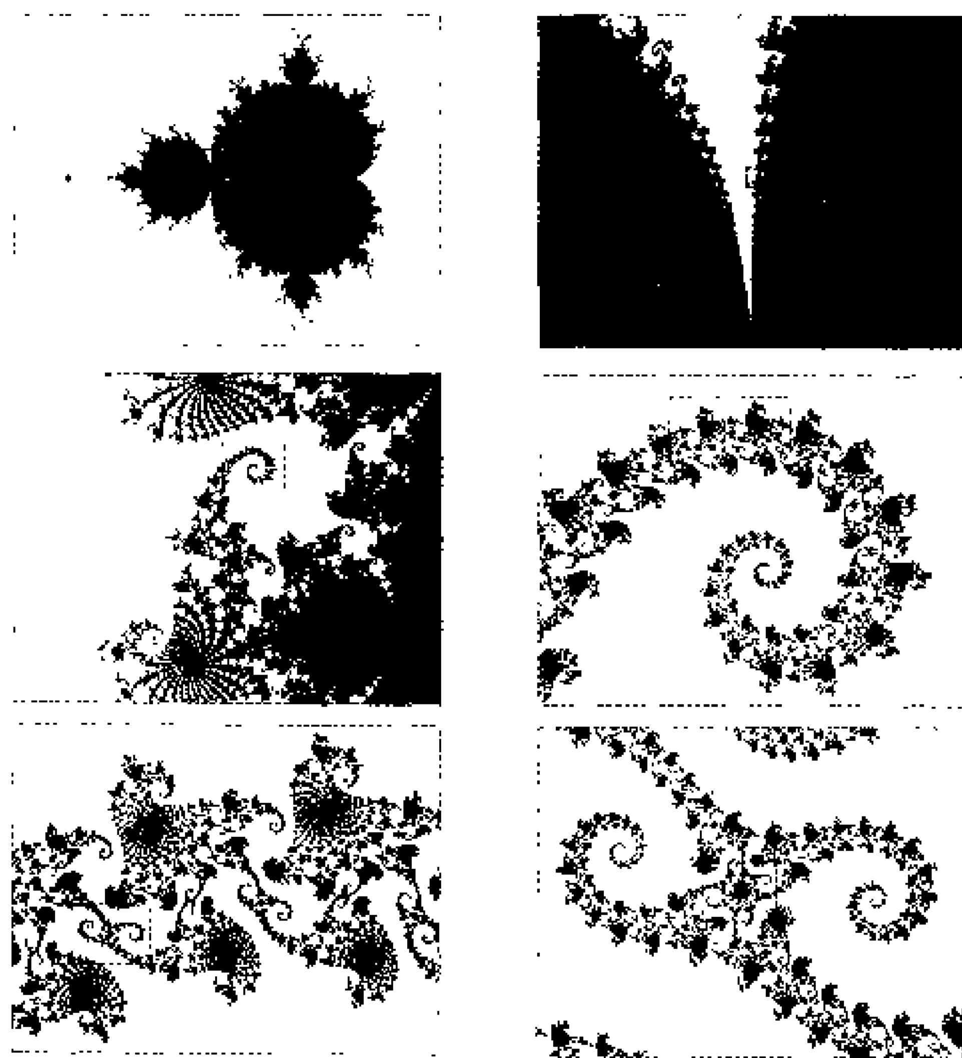


图 6 如果将曼特尔勃洛集合边缘上的一部分放大，总是出现奇怪的形状。



特尔勃洛第一次在计算机屏幕上看到了它——不过很模糊。不久这图形向世界各地进军。现在这个自我缠绕的奇怪图形是当代数学中普遍关注的对象，也是建立于大约有 80 年历史的论文基础之上，这些论文是由两位法国数学家加斯东·尤莉亚(Gaston Julia，1893—1978)和皮尔·法多(Pierre Fatou，1878—1929)撰写的。

曼特尔勃洛集合是通过一系列经典分数几何原理即所谓的尤莉亚集合来定义的。甚至尤莉亚集合，如雪花曲线或西尔平斯基三角形也是无数次重复反馈后得到的图形，而且还得用复数计算。尤莉亚集合具有自身相似的结构。法多和尤莉亚已证明，通过边缘线上很小的一部分就可以再现整个图形。与其他经典分数几何图形相反，它们并不具有完全的自身相似性。他们不是一个图形的准确复印，而是变形的复制。尤莉亚集合也可通过 MVK 机形成。不需将原图缩小，MVK 机只需将原图进行相应的变形复制就可以了。

曼特尔勃洛集合——混沌状态研究的招牌——由于总是出现自身相似的结构，因而是最有规则的图形。因此在它的边缘总是出现其缩小后的复制图。此外它还是通过尤莉亚集合指明了路标。如果用变焦距镜头仔细观察细节，我们就会发现曼特尔勃洛集合的结构中有些点与尤莉亚集合中相应的点很相似。通过近几年的研究，数学家们已弄清了图形中许多相似点的规律性。对于其他相似点，甚至专家们也还不能理解。

对意义存在争议

分数几何改变了以往十分保守的数学家们的心情。一部分人认为分数几何是爱因斯坦以来最伟大的科学成就，另一部分人认为他过于夸张了。

其实学术界该感到高兴：从未有任何数学学科像分数几何这样受到欢迎。每个中学生都知道他的招牌：名为曼特尔勃洛集合的有无数分支的奇怪计算机图形。同时这也要归功于海因茨·奥托·培特根。这位不来梅大学的教授此时此地被视为分数几何的公认权威人物，许多科普书籍也多次宣传过他。他说："混沌分数几何将数学从历史中带入了 21 世纪，新的方法和标注方式很可能会有力解决我们巨大的全球问题。"

这种"大言不惭"的言论使一些人有所不满，如杜塞尔多夫的数学教授克劳斯·施特芬（Klaus Steffen）认为，培特根通过他的书籍以及在媒体上的出现，会在公众中形成不好的印象。数学研究者们决不会仔细观察计算机显示器上的彩色污渍，分数几何只是一个相对较小的局部领域，甚至收益还须有所证明。虽然其他学科如物理或医学的科学家们常常在实际中发现分数几何结构，但是这已经"变成全民体育运动"，因此也就没什么意义了。施特芬嘲笑说："在新时代中，科学已经达到了非常精确的境地。倍受称赞的曼特尔勃洛集合只是新的狂热崇拜的偶像。"对于嘲笑空话，培特根解释是：混沌状态和分数几何使数学学科从其自己选择的狭小空间中解脱出



来，而这并不是对所有居民都是适宜的。实际上纯粹的数学家常常很难向外行解释清楚他们研究的意义和目的。因此有些人分明是在妒忌培特根。然而分数几何是否真的能像他的先驱者们所预言的那样，改变世界还有待证明。

运 动

1665 至 1667 年间英国剑桥蔓延着瘟疫，大学不得不关闭。一位勤奋的常常独来独往的大学生在沃尔斯霍普(Woolsthorpe)他父母的家里度过了这段时光。有一天，他坐在苹果树下的草坪上，一个从树上掉下来的苹果差点砸到他头上，这使他突发灵感：用重力解释天体运动的原因。不错，这个学生就是牛顿(1643—1727)，古典物理学的奠基人。当时这学科还未从它的"姐妹"学科数学中分离出来，例如那时光学、天文学和力学被视为数学的分支学科。为了理解苹果掉下来的原因，牛顿首先必须建立直到今天都还是最重要的数学理论：微分学。在那以前，数学都是从静力学的角度来解释自然的。而现在要描述运动。

为了简单起见，我们设想有一颗 80 米高的苹果树，第一秒时苹果向下运动 5 米，第二秒时——由于地球引力速度变大了——苹果的高度降低了 15 米，第三秒时 25 米，第四秒时 35 米。这样苹果运动了 80 米后落到了地上，每秒时刻它的高度值分别是 80、75、60、35、0 米。

但是，在17世纪时，还没有人能测出这些值。意大利学者伽利略（1564—1642）要想办法使一个球从斜面上滚上去，又滚下来。也许当时科学家和他们的资助者们，关心的不是准确描述苹果落下时的情况，而是要计算炮弹飞行情况时需要与这相同的物理定律。

苹果高度的计算又说明了什么呢？从这些数中看不出什么模式。我们试试计算苹果运动时的速度。刚开始时它是静止的。1秒后，速度约为10米/秒（即36千米/小时），2秒后为20米/秒，3秒后30米/秒。4秒后它以40米/秒的速度落在了草地上。速度显示一个简单的情况：0、10、20、30、40，苹果的速度每秒会增加10米/秒。物理学家可能会说加速度常量为10米/秒·秒或10米/秒^2（事实上地球加速度的值约为9.81米/秒^2）。除了每秒的情况，我们也可以计算任意时间苹果的高度和速度。如果我们在图表上表示苹果的各个高度与时间的关系，可以得到一条曲线。若表示速度和时间的关系，则得到一条直线。表示加速度情况时是一条水平直线：加速度值保持10米/秒^{2}不变。三个物理量描述苹果下落的情况：高度，高度的改变表示速度，以及速度的改变即表示加速度。牛顿不仅认识到，速度和加速度的模式比高度的公式简单，而且他还发明了一种如何由一个量得到另一个量的方法：微分。这是一种计算变化率的方法。所谓的积分是将求微分的过程反过来。通过积分可以由变化率求出最初的曲线。整个情况都可以用图来表示。变化率就是斜率。苹果情况中我们举一个速度曲线是直线



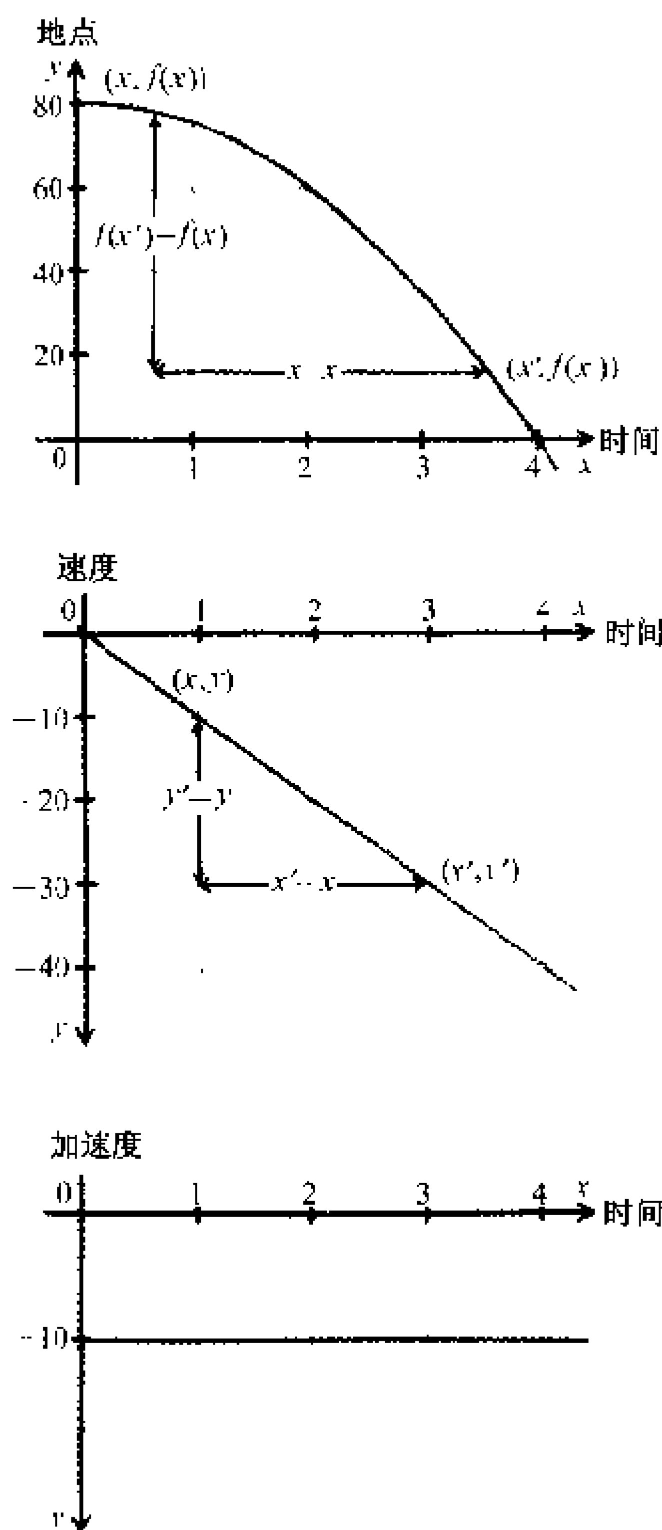


图 7 苹果的掉下表示一条扭弯的曲线，速度为一直线，加速度为常数。



的简单例子。因为刚开始时苹果是静止的，1秒以后速度为10米/秒，所以该直线过点(0，0)和(1，—10)。在我们右移一个单位时，也向下移10个单位量。直线上任意两点的比值都是1∶10。直线是下降的，因此他的斜率为—10。

在曲线时情况复杂些，我们必须运用一个数学中常用的窍门，并将复杂的问题转化为简单的问题。在这个情况中我们通过一些特定斜率的直线即切线来表示曲线在某点的斜率。切线是与曲线在某点接触但不切割的直线。这个描述苹果情况的曲线的斜率(微分)被定义为过这一点的切线的斜率。为求出这个值，可行的方法是计算无穷多个小量的值。现在每个工程师或技术人员都会毫无犹豫地采用这种方法。不过长时间以来无穷小量令数学家们伤透了脑筋。

甚至微分的反过程——积分也可以用图表示。我们观察苹果速度曲线下面积的增加量时，向右移得越远，就会得到高度曲线。微分的发明使自然科学开创了一个新时代。从此以后就可用数学来表示自然界的变化了，如热、波、光、超声、电以及磁的传播或化学反应过程，这一切都可以用这种新方法来计算。

微积分的创造者牛顿天赋聪明，也有他自己的特异之处。例如，他曾深入研究过炼金术，一种中世纪流行的由普通材料获得黄金的方法。同样他还写了无数神学著作。他揭示了《圣经》中所谓的预言，或使毫无关联的章节连在一起。不知出于什么样的原因，对他视为“充血”



微　分

现在如何确定曲线上某一点的变化率或斜率？直线情况时这个值很容易求得：取两点(x, y)和(x', y')，求y值和x值的差的商$(y'-y)/(x'-x)$。苹果速度曲线就可以表示为$y=-10\cdot x$。不管取什么x和x'值，斜率$(y'-y)/(x'-x)$都为-10。现在曲线上的点（比较插图7）由所谓的投影或函数f表示。它使竖轴上的值与横轴上的值相时应。我们想求曲线上的点$[x, f(x)]$的斜率。先求$[f(x')-f(x)]/(x'-x)$，其中x'是横轴上任意许可值。与直线情况相反，可是这个商在曲线与x'无关。我们想求点$[x, f(x)]$处的斜率，所以我们使x'越来越接近x，这样$f(x)$也接近$f(x)$值，因此分子与分母都趋近于0。而当直线平滑无转角时商$[f(x')-f(x)]/(x'-x)$接近一个固定值。它是曲线在点$[x, f(x)]$处切线的斜率。

听起来复杂的东西往往并不难。函数$f(x)=80-5\cdot x^2$大体表示苹果高度曲线。我们取$x=1$，$x'=3$，得到商：

$$[f(x')-f(x)]/(x'-x)=[80-5\cdot 3^2-(80-5)]/2$$

$$=-20。$$

若 $x=1$，$x'=2$ 时，$[f(x')-f(x)]/(x'-x)=[80-5\cdot 2^2-(80-5)]/1=-15$。

$x'=1.5$ 时，商为 -12.5；$x'=1.1$ 时，商为 -10.5；$x'=1.01$ 时，商为 -10.05；$x'=1.001$ 时，商为 -10.005。x' 越接近 1 时，商也更接近 -10。当从另一边计算时，情况同样如此。$x'=0.5$ 时，商为 -7.5；$x'=0.99$ 时，为 -9.95；在 $x=1$ 时，斜率也称为导数的斜率，为 -10。

为了不必在每处都求出商值，数学家们想出了一些办法，不需对每一场所的每一函数计算无数数值。像我们所举例子中简单投影的导数是按简单计算规则求出的。函数 $f(x)=80-51x^2$ 的斜率很容易就可以看出。斜率构成一条用 $g(x)=-10\cdot x$ 表示的直线。

(Fluxionen)的微分学一直保持沉默。他不相信别人，正如他害怕受到批评一样。故弄玄虚没有给他带来什么好处：他常常与其他科学家争论是谁在什么时间发现了什么。他与戈特弗里德·莱布尼茨(Gottfried Leipnitz)关于是谁先发现了微分法的争论，是科学史上最激烈的争论之一。

1669 年牛顿第一次写下了“充血”的理论。这份手稿只有几位英国数学家看过。莱布尼茨于 1684 年发表了他自己独立完成的第一篇关于微分的论文，论文中没



有提到牛顿。学术界通过这篇论文才了解了这门新的数学，这样莱布尼茨就与微分学联系在了一起，而且直到今天还保留着他用的几个词汇。这两位学者激烈地争论着谁优先的问题，这对于他们的智力来说是不值得的，而且这次争论直到19世纪末，使得英国和德国的学者们在合作时互不信任。

从苹果到混沌状态

众所周知，重力不仅可以让苹果从树上掉下来，而且还决定着天体的运行情况。牛顿成功地画出了两个相互吸引的天体运行轨迹：在椭圆轨迹上它们围绕它们共同的重心旋转——即使这个过程不那么明显。例如火星就是在巨大的椭圆上围绕太阳旋转的。而太阳却在一个不太引人注目的小轨迹上旋转：我们的头顶太阳比火星的质量大很多，以至于它们共同的质量中心落在了太阳的表面之下。

当牛顿想确定三个由于重力而互相吸引的天体——如太阳、月亮和地球是如何运动时，他失败了。而且他的继承者们也同样如此。直到今天这个所谓的三个天体的问题虽经多方努力仍然未被完全解决，计算整个太阳系的问题就更不用说了。不过数学家们不仅已找到了接近的答案，而且还指出，对于这个问题不可能有以公式形式来表示的答案。1994年美国佐治亚州工学院的谢志洪的证明更为惊人：天体可能会慢慢偏离轨道。因而我们的太阳系并不是稳定的。这三个天体的问题是近年来出



现的混沌状态研究的典型例子之一，根据这个研究我们无法预测复杂系统的情况。

无　穷

无穷在数学中随处可见。有时无穷是明显的，如欧几里德关于质数数目的定理；有时是隐藏的，如中学数学中众所周知的定理：三角形内角和为 180 度就涉及到无穷，因为它不是指某个具体的三角形，而是指任意一个三角形。因为一个平面上不在一条直线上的任意三个点可构成一个三角形，所以有无数个不同的三角形。同样毕达哥拉斯定理也隐含着无穷。因为有无穷个直角三角形。准确地说，微分也不是有限的，因为在求微商时要求 x' 无穷接近于 x。数学是惟一能客观对有限的生物检验无穷定理的科学，研究人员运用无穷来开发技术，其中一个重要概念就是变量。它代表整体中的任意一个。我们在这本书中常常用到变量，例如欧几里德的证明，存在无穷多个质数。我们假设有有限个质数并将它们列出来：P_1、P_2、P_3、…、P_n。其中 n 和代表质数的 P_1、P_2、P_3、…、P_n 一样是一个变量——它代表任意一个自然数。

用变量可以一下解决无穷多个别情况的问题。一个简单的例子是如命题“每个奇数平方数除以 8 后余 1”的证明。我们可以用最初几个奇数平方来检验这个命题。

$$1^2 = 1 = 0 \times 8 \cdots \text{加 } 1$$



$3^2 = 9 = 1 \times 8 \cdots$ 加 1

$5^2 = 25 = 3 \times 8 \cdots$ 加 1

$7^2 = 49 = 6 \times 8 \cdots$ 加 1

$9^2 = 81 = 10 \times 8 \cdots$ 加 1

....

这样我们决不可能得出一个普通的证明。可能在下个奇数平方数时这个命题就不成立了。用一个巧妙的选择的变量可以避开这个问题。

因为奇数的乘积总为奇数，所以奇数平方数必定是一个奇数。每个奇数又可写成为 $2 \cdot n + 1$，其中 n 是任意自然数。它的平方可按公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$：

$$(2 \cdot n + 1)^2 = 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 = 4 \cdot n \cdot (n+1) + 1$$

因为 n 和 $n+1$ 是连续的数，所以两者之一必为偶数。这就是说，乘积 $n \cdot (n+1)$ 也是偶数。因此 $n \cdot (n+1)/2$ 是一个整数。这样我们可以将等式的右侧改写为：

$$(2 \cdot n + 1)^2 = 8 \cdot [n \cdot (n+1)/2] + 1$$

当 $n \cdot (n+1)/2$ 是整数，那么一个奇数的平方 $(2 \cdot n + 1)^2$ 必定为 8 的倍数加 1。

怪论，真怪

如果涉及的是无穷，我们普通人很快就无法想像了。以哥廷根数学家达韦德·希尔贝特（David Hilbert，1862—1943）命名的希尔贝特旅店，就是这样一个例子。

这个数学方式的旅店有无数个房间，因而它从未住满过。如果哪天所有的房间都住满了人后，又来了一位新客人，所有的人只要顺移一个房间就可以了：1 号房的客人把房间留给新来的人，并住进 2 号房，2 号房的客人住 3 号房，3 号房的客人住 4 号房，等等……以此类推。这样每人都有了自己的房间，尽管如此还有一间房留给新来的客人。

甚至无穷多个新到的客人，也不会让希尔贝特旅店的门卫为难。每位个人只需换到号码为他现在房间号码的 2 倍的房间就可以了。这样 1 号房的客人换到 2 号房，2 号房的客人换到 4 号房，3 号房的客人换到 6 号房，4 号房的客人换到 8 号房，以此类推。最后有无穷多的房间空出来了，所有房号均为奇数的房间。

古希腊人早已知道了另一个怪论：公元前 5 世纪时埃利亚（Area）的齐农（Zenon）思考过英雄阿希来思（Achlilles）和乌龟之间的竞赛问题。动物先爬 100 米后阿希来思才开始跑。齐农想，不管阿希来思走得多快，它也永远不可能超过乌龟。但它到达乌龟的起点时，乌龟已跑到前面某处了。当它到达这处时，这只爬行动物又跑到另一处了，这个推论可以随便重复无数次，即在这场赛跑中乌龟获胜。听起来似乎挺有道理，果真如此吗？

显然证明本身有说服力，但这个故事有不足之处。如果阿希来思的速度是乌龟的 10 倍，乌龟跑了 10 米时，英雄阿希来思刚好起跑。乌龟再跑 1 米时，阿希来思跑



过了刚才乌龟跑的 10 米。乌龟再跑 10 厘米，这位宙斯的孙子又跑过了 1 米……这个过程可以无限延续下去。但这个距离总长是有限的 111.111…米。

过了这个距离后，这个焕发的阿希来思就会赶上并超过乌龟。如果将阿希来思跑过的路程相加，得到无穷项的和：100＋10＋0.1＋0.01＋…。这个和（无穷）级数。数学家们想出了许多准则，如阿希来思例子那样，当越来越多加数叠加时，判断级数具有有限的值还是无限地增加。

无 穷 的 和

莱布尼茨青年时，他的老师、荷兰的科学家克里斯蒂安·惠更斯(Christian Huygens, 1629—1695)有一次用级数的计算问题考验过他。要求莱布尼茨确定这个级数的值为：

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}+\cdots$$

其中第 n 项加数的分母是所有直至 n 项的自然数的和（例如 $n=4$ 时，分母为 $4+3+2+1=10$）。莱布尼茨想了很久，最后得到了下面的等式：

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}+\cdots=$$

$$2\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\cdots\right]=$$

$$2\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right]=2$$

第一步他从和中提出2(括号表示每个加数分别乘以2),这个想法的聪明之处在下一步就体现出来了。每个圆括号中的数的差等于上一个中的一个加数,而且每个分数都是出现一次负数后在下一个圆括号中出现正值。移去括号后,所有的分数相互抵消,只有第一项1。1乘以方括号前的2得到答案为2。

无穷大不等于无穷尽

对于数学家来说,不是只存在一个无穷,而是有许多(准确地说是无穷多)。每一个大于另一个。无穷大之间如何比较呢?原则上和小孩数数一样:一只手就能数清桌上放的4只苹果,一只苹果用一只手指。数到无名指即第四根手指时就结束了,成年人不再用手指数数了。他们会在脑子里分配给每只苹果一个数字:1,2,3,4。

无穷大也是这样的,数学家们试图找出一种明确的安排,例如偶数与所有自然数的无穷大应是一样的,因为我们可以将每个数的2倍与这个数相对应,由此得出了



一个规则，据此每个自然数只与一个偶数对应。反之亦然：每个偶数与一个自然数，即它的 1/2 相对应。

分数的数目比自然数的数目要多吗？不，这里也可找到对应的方法。我们设想列表不断向右向下延长，这样他一定能包含所有有理数。有些数字多次出现，但这个并没有什么影响。

现在我们可以按提示的那样——通过弯弯曲曲的运动，将所有数连起来。我们碰到的第一个数被标为 1，第二个数标为 2，第三个数标为 3，依次类推。这样我们就找到了一种使每个分数与一个自然数并列的方法。不同的分数各与不同的自然数并列。因此分数——或有理数——与自然数有相同的无穷大。

	1	2	3	4	5	6	…
1	1	2	3	4	5	6	…
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	…
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	…
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	…
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	…
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	…
…	…	…	…	…	…	…	…

那么实数的情况呢？奇怪的是它的无穷度大一些。对此我们用反证法。我们假定实数与自然数间存在对称。然后可以列出所有实数，特别是 0～1 之间的实数。我们可以设想，将其如打字机打印那样：

$$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$$

$$0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$$

$$0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 a_{11} 代表第一个数的小数点后第一个数字，a_{12} 代表第一个数的小数点后第二个数字，a_{21} 表示第二个数的小数点后第一个数字，一般来说 a_{mn} 代表第 m 个数的小数点后第 n 个数字。

这样的表列能包含所有的实数吗？乔治·坎托尔(Georg Cantor，1845—1918)用一个天才的巧妙方法证明这是不可能的。他将对角线上的数组成了一个表列中不可能包含的新的数：$\underline{a}_{11}\underline{a}_{22}\underline{a}_{33}\cdots$。$\underline{a}_{11}$ 表示 0～9 之间的一个不同于 a_{11} 的数字，$\underline{a}_{22}$ 表示 0～9 之间不同于 a_{22} 的数字，等等…，由此得到的数 $0.\underline{a}_{11}\underline{a}_{22}\underline{a}_{33}$ 就不可能与列表中的数相符。与第 n 个数相比，他们的小数点后第 n 个数字不一样。由于这适用于所有自然数 n，所以我们找到了一个不在表上列出的数。这与假设矛盾。因此假设是错误的。

如果谁对这个钻牛角尖的证明确凿感到怀疑，不用感到难过。19 世纪坎托尔想出这个方法时，他也受到了同事们尖锐的批评。亨利·庞加莱(Henri Poncaré，1854—1912)，这位当时除坎托尔以外最著名的数学家认为，后代会将坎托尔的想法视为人们刚从中恢复过来的一种疾病。那时他对此感到很失望，现在不再有人怀疑



他了。坎托尔本人却因为这些说法而消沉了，最后他住进了一家精神病院。

实数的无穷大是自然数的更高的一级，还是它们之间还有无穷大？为了得出结论，数学家们花了几十年心血，却一无所获。1963 年斯坦福大学的保罗·科恩(Paul Conen)证明这个问题没有答案。

概　率

世界上没有什么比数学概念更清楚地确定过。不过数学概念也可能涉及不确定的东西，概率论描述的就是偶然情况。概率论的起源可以追溯到 17 世纪的法国，那时有些着了迷的赌徒想计算他们赢的机会有多少。那些创导者思考这样的问题：两个骰子掷 1 次至少有一个“六”点，和掷 12 次至少有两个“六”点，哪个可能性更大？

此后几乎所有科学都受益于概率计算：物理学、气象学、工程学、生物学、医学、经济学、心理学、社会学。直到今天许多初学者，还在通过掷骰子、扔硬币和从坛子中拿出不同颜色的气球这些例子，来研究概率的基本特征。其中概率被定义为希望情况与所有可能性之间的商。扔硬币的概率为 1/2：所希望的情况如指硬币上的“头像”，所有可能性是“头像”和“硬币数字”。掷骰子时有 6 种可能性。掷出“六”点的概率是 1/6。数学中的概率总是在 0～1 之间。不可能的情况，如掷一个骰子时得到“七”点，概率为 0，并不具有实际结果意义。肯定会出现的情



况，如"一"，"二"，"三"，"四"，"五"，"六"点的概率值为1。所谓互补情况概率容易求出。一次掷一个骰子时，不得到"六"点的概率为 1－1/6＝5/6。

掷两个骰子时至少有一个"六"点的概率有多大？1/3？不，我们一个一个数。掷两个骰子时有 36 种情况：

1，1	1，2	1，3	1，4	1，5	1，6
2，1	2，2	2，3	2，4	2，5	2，6
3，1	3，2	3，3	3，4	3，5	3，6
4，1	4，2	4，3	4，4	4，5	4，6
5，1	5，2	5，3	5，4	5，5	5，6
6，1	6，2	6，3	6，4	6，5	6，6

其中 11 次（最后一行和最后一列）可能出现"六"点，即概率为 11/36。如果谁认为是 1/3 —— 每个骰子的概率为 1/6，然后相加，那把右下角的情况计算了 2 次。若已经有一个骰子显示的是"六"点，即使另一个也是"六"点，它的概率也不会提高。我们可以通过互补情况求出获胜机遇：每个骰子不显示"六"点的概率都是 5/6，其中任何一个都不是"六"点的概率就是(5/6)·(5/6)。互补情况（至少有一个"六"点）的概率为：

$$1-(5/6)\cdot(5/6)=1-25/36=0.305\,55\cdots$$

用同样的方法，可以计算出掷 12 次时两颗骰子都为"六"点的概率。掷 1 次时，不会出现两个"六"点的概率为 25/36，掷 2 次时为(35/36)·(35/36)，因此 12 次时 $(35/36)^{12}$。



$$1-(35/36)^{12}=0.286\ 841\cdots$$

每次掷骰子的结果与下一次无关：如果第一次掷出"六"点，他决不会对下次掷的结果有影响（不管是同时用不同的骰子掷，或先后用同一个骰子掷）。在第二次掷时，每个出现数概率都是1/6——只要所掷的骰子不是一边比一边重的话。这个掷骰子之间的不相关性，听起来似乎是明白易懂的，但偏偏有些人就是不相信这一点，而一下子输光了所有的财产。如果掷了100次的结果都是"六"点，那么第101次时，出现数的概率还是1/6。同样在玩了多次轮盘赌后，下一次每个数字的概率也没有改变（除非有人摆弄过轮盘赌桌）。陀思妥耶夫斯基（Fjodor Dostojewski，1821—1881）在他的著名小说《赌徒》中写道："球既没有记忆，也没有良心。"

而有些着了迷的赌徒们不愿意看清这一点，在最佳的社会中也会出现这种情况：18世纪法国伟大的数学家之一让·勒·朗阿莱贝（Jean le Rond d'Alembert，1717—1783），坚信抛了多次硬币结果都是"头像"后，"国徽"图像的概率就会增大。而且他还认为，将同一个硬币抛3次和同时抛3个硬币的情况完全不同。今天没有数学家再相信这些话了。

当然也有结果相互关联的偶然情况，这些情况常常带来困难。数学家们试图以所谓条件概率来描述这种复杂情况。条件概率是指某一特定事件发生之后出现了另一件事的概率。例如在一个坛子里有3个红球和3个黑球。若从中拿出一个球，那么红球的概率为1/2。如果

已拿出一个红球，再要拿出下一个，那么这时拿出红球的概率就只有 2/5，因为现在坛中有 2 个红球、3 个黑球。连续两次都拿出红球的概率就是 1/2（第一次拿出红球的概率）乘以 2/5（如果第一次拿出的是红球，第二次拿出红球的概率）等于 1/5。相反地，如果我们把最先抽出的球又放回去，这样就可以得到结果间的不相关性。当然数学中的概念——不相关性和条件概率当然已有明确定义。我们只需有模糊的考虑就可以了。

无穷多次掷骰子

甚至数学也不能确定偶然实验的结果，如掷骰子、抛硬币或生孩子（生男孩还是生女孩），但如实验多次重复，可能确定其结果的趋势。所有概率论中的重要定理涉及的都是无数次重复时的情况。

如果掷骰子的次数足够多，那么掷出“六”点的次数与其他掷数之商一定会接近 1/6。将这明白易懂的事实，用数学方法正确阐述并证明的是雅各布·勃诺利（Jakob Bernoulli，1654—1705）作出的贡献。据《科学传记词典》所称，他是一位不受欢迎的人，顽固倔强，爱报复，自卑，然而他却坚信自己的能力。

他的“大数定律”中著名的勃诺利定理直到今天还常常被人使用，如人寿保险中根据许多实验（顾客的生死）来计算保险金。可惜许多赌汉认为，由这个定理推导出——经过一段时间会出现平衡，但是情况却并非如此。虽然“大数定律”保证概率迟早会接近实际情况，但没说明何



时接近实际情况。没有一种赌博能对一枚不做“手脚”的硬币中事先从中谋利。轮盘赌和掷骰子的情况都是这样。

概率论的其他重要定理所涉及的也是同一个实验无限次重复时的情况。这个中间的极限值定理说明在很多情况下，结果都是一条曲线，即 10 马克纸币上的高斯头像旁的所谓高斯曲线。

尽管很早就有了概率论，但直到 1933 年安德利埃·尼柯拉延维希·柯莫哥洛夫(Anrej Nikolajewitsch Kolmogorow, 1903—1987)才将他改成了今天的形式。这位前苏联数学家在许多复杂的群论的基础上建立了概率论。学术界对此争论了很久，才最后贯彻了他的设想。

概率计算的飞跃

我们的大脑似乎还有问题。计算概率甚至有些天才数学家也犯过一些错误。莱布尼茨认为掷两个骰子时得出“十一”点和“十二”点的概率是一样的，只有两个骰子都是“六”点时才能得到“十二”点，而“十一”可以由两种方式得到(见前面所列的概率表)。不是第一个骰子为“五”点，第二个骰子为“六”点或反过来，第一个骰子为“六”点，第二个骰子为“五”点。因此，如每一位普通的赌徒都能证明的那样，可以得出，掷两个骰子时，在掷 11 次和掷 12 次时，平均出现的数均为 2 倍这样多。

概率论中有许多这样的怪论，它们不与逻辑的定律相矛盾，只是与人们健全理解相矛盾——这是不可避免的。我们在思考时擅长的是发现模式，甚至可在情况还

未完全明朗前根据情势发展战略。这对猎人和收藏家来讲肯定是合适的，而同时代的人在计算概率时，有时却一筹莫展。或者您认为有多少人时，其中两人的生日相同的概率大于1/2?

答案是23。我们假设这些生日是均匀分布在一年中的，而且每个人的生日都不同。那么第一个人可以是任意一天出生的，第二个人的生日就可能是第一个人生日以外的其他时间，对第三个人来说，他的生日就只有 $365-2=363$ 种可能性……。如此等等。23人中没有两个人同一生日的概率就是：

$$\left(\frac{365}{365}\right)\times\left(\frac{364}{365}\right)\times\left(\frac{363}{365}\right)\times\cdots\times\left(\frac{343}{365}\right)=0.49\cdots$$

这样至少有两个人同一天生日的概率为 $1-0.49>0.5$。

与生活中一样，概率论中也常常涉及金钱问题："山羊还是汽车"是美国电视节目"让我们做一笔交易"的一句台词。当晚的获胜者可以在节目快结束时在三扇门之间进行选择。其中一扇门后的奖品为一辆汽车，另两扇门后各有一只代表鸣叫的山羊。参与者作出决定后，主持人先打开其他两扇门中的一扇，总是一只羊——这是游戏规则。现在参与者可以改变他的选择，他可以从此来提高获胜的概率吗?

美国《检阅》杂志(Parade)1990年提出这个问题后，引起了一场激烈的争论。一年后德国媒介也开始了讨论，虽然1959年《美国科学》杂志将这个问题略微改变后



进行介绍时，收到了许多读者的来信。然而这个问题令人惊讶的答案又一次引起了轰动：如果参与者改变选择，获胜的概率增加一倍。

如果他坚持选那扇他一次选中的门，我们称这扇门为 A。如果他坚持选这扇门，他有 1/3 的可能性获得汽车。如果他改变主意选择，他获胜的机会为 2/3。三种可能情况中，他有两种获胜可能性——即豪华汽车在 B 门或 C 门后。

——如果汽车在 B 门处，主持人会让他看 C 门后的羊。参与者将选择由 A 门改为 B 门，他就成了汽车的主人。

——若车在 C 门后，主持人会打开 B 门，参与者将 A 门改为 C 门就赢了。

——只有当 A 门是幸运门时，他会失去汽车。

大多数人很失望，或多或少还坚持认为不管参与者坚持愿意还是改变主意，获胜的概率是一样的。

为了使迷惘更深入，提出最后一个例子，说明概率计算与直觉无关。您认为下面这个小游戏怎么样：像无数次抛硬币的结果一样，我们两人每个人说一个由 3 个符号构成的排列，如"国徽—国徽—数"或"数—国徽—数"。就这样抛硬币，直到出现两种情况中的一种。谁写的排列先出现谁就赢。您可以列出您的符号顺序。您试试？

虽然三项顺序以 1/8 的概率相同，这个游戏——在专业文献中称之为"自相矛盾的便士"——不公平。最先说出预测符号的人多数会有一半的人会失败。一个聪明的对手会将第一个人的前两个标记作为自己的后两个标

记，他把第一次预测就这样选择，而不是相反，把开始的两项预测与对手的两次相符。他的前两个标记与对手的后两个不一致。

假如您赌的是"数—国徽—数"，您的对手就会以"数—数—国徽"来对抗。若某个时候出现了"数—国徽"，有半数情况下，他获胜——即当第一个标记为"数"时。而只是当先出现"国徽"，再出现"数"时，您的符号顺序才是正确的。这种情况的概率为1/4。由这个概率和只抛3次就成功的概率——这个概率为$(1/2)\times(1/2)\times(1/2)=1/8$——可以计算出获胜概率。您的获胜概率为$(1/4)+(1/8)=(3/8)$。

如果谁不相信的话，尽可试试。作者在试了24次后中止了实验：正是有9次先出现"数—国徽—数"，有15次先出现"数—数—国徽"。

随 机 数

所谓的随机数，即随意选择的数列，在计算机模拟中常常解决不确定性问题，如次日是否会下雨，一台器械使用多长时间后会出现第一次故障，或高速公路上出现堵塞的频率是多少。借助计算机模拟，计算机可以在数秒内完成实际中需要数周或数月的计算过程——而且不只是计算一次：随着随机数的不断更新，计算机完成数千次模拟计算。最终计算机会得出某一结果，如灯泡烧坏或第二天出现雨天的频率。这样就可以估出真实生活中这些结果的概率。



研究者们还用随机数解决并非随机的问题。例如他们用随机数找出出油处，协调机器人的双臂，预报天气情况，随机数甚至可用于计算面积。数学家们从随机分布的点形成通常呈矩形的云所形成的雨落下来。落在多半从直角形的云层所覆盖的地面上。雨点数量多寡根据云层深浅如何，会落在所望下雨的地面上。对于形状复杂的区域，只用这种方法就可求面积了。

基于随机数的方法叫——以地中海海边著名的赌城名字命名的——蒙特卡洛(Monte-Carlo)方法。科学家们是在美国的曼哈顿工程中研制原子弹时发明这些方法的，他们来解决物理过程中的复杂公式。

早在18世纪方法的前身就出现了。当时法国自然科学家莱克勒·德·布冯(Georges-Lonis Leclere de Buffon，1707—1788)曾多次将一根针扔到一块细条纹桌布上，而且针的位置是随意的。同时他数出某条细纹被扔中的频率。扔中次数除以所有次数应接近于计算出的某条细纹被扔中的概率。因为后者中出现了圆周率π，因此他可以近似确定π的值。一位意大利数学家拉策利尼(Lazzerini)在1901年曾把针这样扔过3 408次。他求出的π值只比π的实际值小百万分之一。这么高的精确度让人产生怀疑：拉策利尼能利用纯粹偶然性求出这么接近的π值的概率低于4%。

为了得到用于模拟的随机数，并不能证明能借用掷骰子或玩轮盘赌的方法。因为需要的数字很多，而且不能确定轮盘和骰子是否真的只由偶然情况决定，一段时



间后会不会一直显示某个数字。物理的偶然结果，如放射性衰变，证明也是不实际的。

如果让试验参与者写下一列数，所得到的结果是完全不能用的，因为在所有规则中通常参与者很少将同一个数字连续写两遍或更多遍。例如在掷骰子时，同一点数在下次掷时的概率为 1/6。由 1 至 6 之间的数构成的 120 个随机数数列中，总是有约 20 对相同的数——如 3 个相同数字先后重复 3 次。人的偶然思路悠动似乎形成一种心理阻碍，提示："如果看来是偶然的话，那我就不能重新书写我刚才写的数字。"

在蒙特卡洛方法刚被采用时兰德公司出版了一本含 100 万随机数的书——与现代的计算机一秒钟内处理的随机数一样多，因此是不可能将这些随机数列在表格里的。现在计算机也能用简单公式得出一些看起来似乎是随机数的数列。这样任何时候都有足够长的数列可供运用。而且这些数列可再形成。用完全相同的数列可对结果进行复算。

虽然参与曼哈顿工程的美国数学家、计算机先驱约翰·冯·诺曼(John von Neumann，1903—1957)曾骂道："任何想用数学方法来得到随机数的人都犯了罪。"不久后他自己也经不起诱惑，不去做试验了。他的取中间数二次方的方法被证明是不能用的。

如今按下每个可编程微型计算机的键盘，它都会显示整个随机数的清单。每种编程语言都有相应的指令。通常计算机总是运用简单的线性幂公式。其中某个起始



量是上一步的结果。由于模拟中大量使用这些"伪随机数",在模拟中这种基本公式可能是世上最常用的公式。

但究竟什么叫随机呢?同所有哲学问题一样,对这个问题思考的时间越长,这个问题的答案就越难。数学家长久以来一直在思考着这样一个问题:怎样是理想的随机数数列?如果将一个硬币先后多次抛向空中并将"数"记为1,"国徽"记为0,所得的结果应该被视为是随机的。困难之处在于:每种可能的数列都是以相同概率出现的。00 000的概率与10 011的概率是一样的为1/32,尽管后者显得更随机些。但为什么更随机些呢,这可能意味着什么呢?

70年代复杂性理论对此提出出路:如果一个数列不能用较短的一列符号来表示,那么他就是随机的。例如0、1,0、1,0、1,0、1,0、1…,0、1可表示为"0、1重复x次"。随机数列是不可能用这么简单的形式表示的。理论学家可能同意这个定义,但是用这个定义只能辨别出是非随机数列,因为没人能证明一个数列不能用某种方式更简便地来简单表示,因此在实践中复杂性理论只在一定条件下适用。通常数列的随机性是用统计测试来检验的,例如他检验数字是否不均匀分布的,连续数字间的差是否有规则。毕竟这都是需要知道的一般规则。

近几年数学家思考出一种检验随机性的新方法:它检验数列中的项,预料这一问题可能有多难。如果在一个由0和1构成的数列中两个数构成的数块01后常跟一个1,这个数列就有一定可预见性。若01后0和1出

现的次数一样多，也无法知道紧跟着的哪个数是多少。“近熵”公式决定在由两个数构成的不同数块后0与1出现的频率，与50%对50%的平衡情况出入有多大，并计算出所有两个数数块的平均值。然后用3个数数块等等，以此类推计算出来。

用这种方法可测出一个数列的随机度：从“根本不随机”，“马马虎虎随机”到“随机”。目前数学家是根据“近熵”公式，而不是根据古典概率论来判断数列是否随机。这个新公式是否可行，还有待进一步验证。

谎言、粗鲁谎言和统计学

数学分支中给人影响最差的统计学也是以概率论为基础的。一条颇受欢迎的警句是这样说的：“不要相信不是您自己伪造的统计。”英国的政治家本杰明·狄斯莱利(Benjamin Disraeli，1804—1881)评说：“有三种谎言——谎言、粗鲁诺言和统计。”那些臆想出来的过硬数字却受到更多的欢迎。许多大的日报中“百分比”这个词数出现百次之多。图表常常引起虚假的效果。通过选择比例尺，图表可以突出差别，通过选择时间可以使得效果更明显，而且趋势一直持续到将来。用后一种方法也可“证明”：2031年德国汽车数会超过10亿辆。因为1911年旧联邦州有18 000辆轿车，1951年715 000辆，1991年3 100万辆，即每40年轿车数量会增加40倍。因此再过40年汽车数为12亿，即每个公民有10辆以上的轿车，街道会因此而堵塞。



某飞行员协会想弄清飞行员早死亡的情况，他们做了一项调查，对此伦敦《时报》这样报道说："民用航线中60%的飞行员去世时的年龄不到65岁。"这个职业协会却忘记他的会员的特殊年龄结构：由于近几年民航发展迅速，大多数飞行员——不管是现役的还是退休的——都不到65岁。这样也就没有理由担心已去世的飞行员中60%的人还未达到这个年龄。

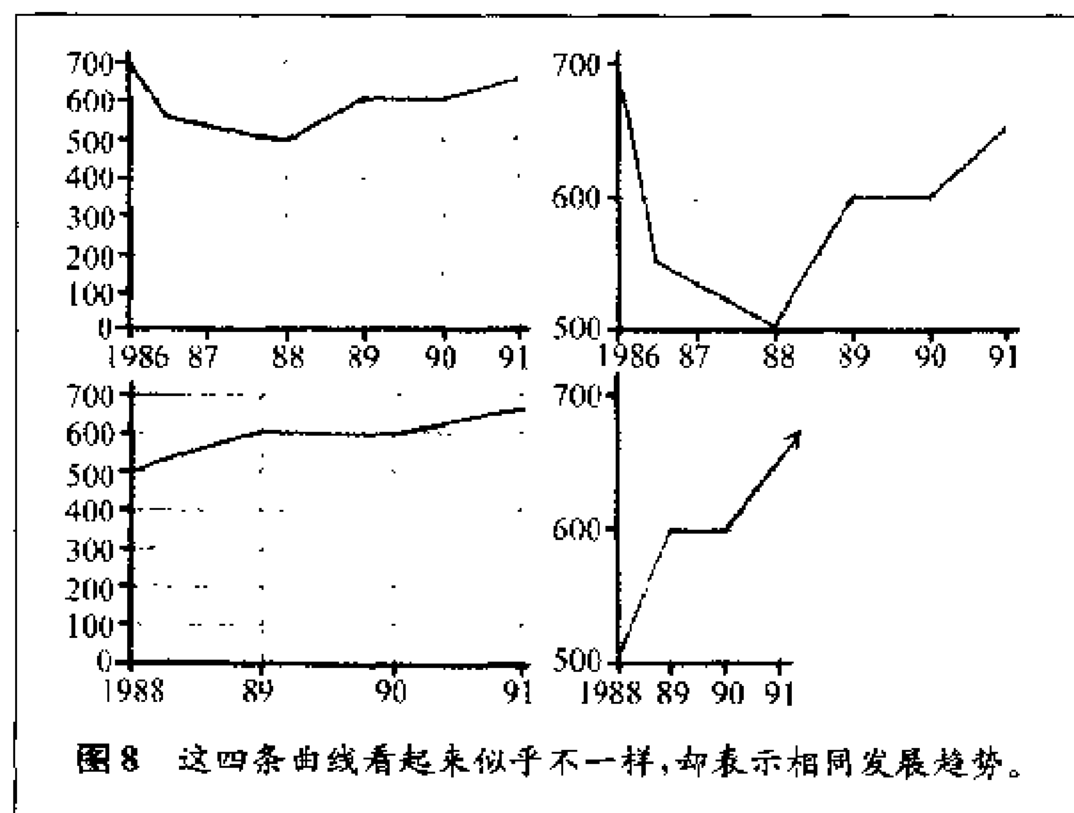


图8 这四条曲线看起来似乎不一样，却表示相同发展趋势。

另一个虚构的例子：一项用于检查一种致命的病毒感染的测试——在此假设有8 000名受感染者——识别出了每个带这种病毒的人，但是测验的1%也是为健康人进行的。结果对您说来是正面的——谁会为此而吃惊呢？没有什么理由引起恐慌。因为如果假设所有德国人



都接受了检查，那么就会有 800 000 人(8 000 万居民中的 1%)被误认为感染了。而感染病毒的人只有大约 8 000 人。这样尽管结果是正面的，但您却被认为是 99%的健康人中的一个。

如果有谁被吓住了，可以因为生活在最好的社会而感到安慰。汉堡的生物物理学家汉斯-彼得·贝克-博恩霍尔特(Hans-Peter Beck-Bornholdt)与汉斯-赫尔曼·杜本(Hans-Hermann Dubben)在一次学术会议上介绍了一个类似情况，并请专家们说出实际受感染的概率。被问的 15 个人中只有一人知道正确答案。

对数据的错误解释也常因互相关联，即纯粹的数字上的相同发展，与因果关系混淆了。经典的例子是：1964 年至 1978 年德国的出生率降低，同时儿童数也减少了，因而小孩会多生吗？进行收入调查的结果也许得与命题“光头挣钱多”一致。虽然光头并不比有头发的人更擅长经营，但光头是男性的专利，而且常常年长些，职位高，工资高。

这些例子中有一点是显而易见的，即各陈述之间没有因果关系。但其他情况下类似的谬论会引起不良后果。大城市的犯罪率高，而且外国人占的比例也较大，如果谁将此联系起来，把外国人与同年龄、同性别的德国人相比较得出的判断数字，就说外国人的犯罪会多，可得作详细比较才行。这样同样会使人相信鹳会带来小孩[1]的说法了。

① 西方传说鹳能带来小孩，以此喻意婴儿出生。—编者注



最 优 化

日常生活中我们经常遇到最优化问题：在哪里可买到最实惠的东西？怎样投资才能利息最高而且最可靠？哪种职业能令人最快乐而且有前途？数学也要研究最优化问题，随着计算机的发展，这个分支学科越来越富有意义，最常用的数学方法之一是线性最优化。线性表示等式中只出现加减和乘法，没有幂方或更复杂的计算。

例如：一位地毯编织者买了 100 千克的红线和 100 千克的黄线用于加工地毯。他打算编两种款式：对于款式 A，每块地毯需要 1 千克红线和 2 千克黄线，款式 B 则需要 3 千克红线，1 千克黄线。在一定的库存情况下，款式 A 的地毯单价为 80 马克，款式 B 为 100 马克。在上述红、黄线库存情况下，两种款式的地毯他该各生产多少才能达到最大销售额？

这个问题可以简单的“数学化”：来解决 x 表示地毯编织者生产款式 A 的地毯数，y 表示款式 B 的地毯数。那么必须满足：

$x + 3y \leqslant 100$（仓库里有 100 千克红线）

$2x + y \leqslant 100$（仓库里有 100 千克黄线）

当然还要满足 $x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$。数量为负数的地毯是很难卖出的。

在这两个条件下可使总价最高：

最大值 $80x+100y$

这个最大值问题可用图表来表示（见图 9）。坐标系中所有满足 $x+3y=100$ 的点 (x,y) 构成一条直线，满足 $x+3y\leqslant 100$ 的点 (x,y) 都位于直线左下方，满足 $2x+y\leqslant 100$ 的点 (x,y) 相应是这样的。所有满足地毯问题条件的解答都在一个由两条直线与坐标轴围成的四边形中。

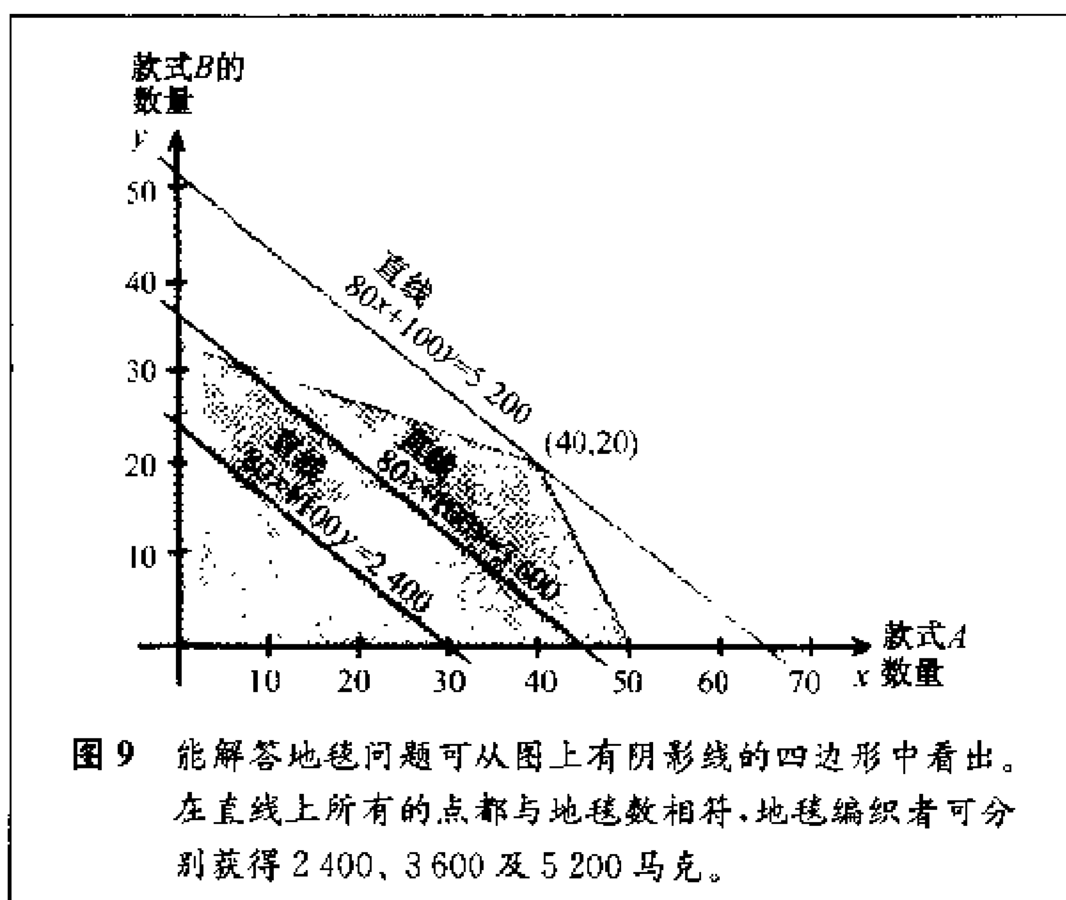


图 9 能解答地毯问题可从图上有阴影线的四边形中看出。在直线上所有的点都与地毯数相符，地毯编织者可分别获得 2 400、3 600 及 5 200 马克。

对于任何正数 p，满足 $80x+100y=p$ 的所有点 (x,y) 都在直线上。图中画出 $p=2\,400$、$3\,600$ 和 $5\,200$ 时的直线。不同的 p 值所得出的直线互相平行。现在要求寻找在四边形中且位移距离最大的平行线上的一点。所



求点为(40，20)，即地毯编织者应生产40块A款式和20块B款式地毯。

现实中的问题当然比这一简单问题更广泛些。如地毯就可能有许多颜色和更多款式，当然问题的结构并没变。若有更多款式，就不那么容易用图来表示了(满足条件的答案虽然也能形成四边形，但是都是多维四边形，这种图很难画出)。要求最优化问题也同样如此。为了解决这个问题，早在1947年，数学家就找到了一种方法即所谓单纯形方法。他们用这种方法，并借助计算机成功地解决了数百万个复数的最优化问题。我们所举的例子的答案位于四边形的一个角上，这决非偶然。线性问题中，不管附加条件的详情是什么，满足条件的范围上的任意角都是最优化的。从角到角，每次会引起目标值的更新，直到最终找到最优化。目前数学家也思考出了其他解决战略。在几种情况下他们胜过古典方法，不过古典方法仍然是最有成果的数学发现之一。专家认为，从用西姆普勒斯(Simplex)方法帮助公司所节省的费用中拿出一小部分，就可毫无问题资助世界上所有从事研究的数学家了。

商务旅游的问题

到目前为止，数学中另有一个最优化问题还远远没有取得成果：一位商人要去几个城市，他打算选择这样的路线，使得他所走的路程尽可能短，而且每个城市他只去一次。这听起来很简单，但若计划要去的城市较多，就很

难找到最佳的路线。若要去 10 个城市时，就已有 300 万个以上的选择。我们系统地分析一下：要去 2 个城市 A 和 B 时有 2 种可能性，要么先去 A 再去 B，或反过来，先去 B 再去 A；要去 3 个城市 A、B 和 C 时，就有 6 条线路可以选择：ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA；4 个城市时，有 24 种可能性；5 个城市有 120 种。一般情况是：n 个城市时，有 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ 条线路（数学家称这个乘积为 n 的阶乘，写作 $n!$）路线数很快就增加到无穷大了。假设我们把去 20 个城市所有可能的线路都写下来，每张打印纸上写 1 000 条，那么把这些打印纸叠起来，就可以得到一个"高"达太阳的"纸塔"。

讨厌的是，到目前为止也不知道有效的途径，而无需用太多的选择作出尝试，来找到最短的路线。用快速计算机，专家可以提供数百万个关于城市出行的方案。此外，他们还找到了相对较快的方法，虽不能达到最优化，但至少可找到一条可行的路线，路程只长了几个百分点，以用于数百个城市的商业旅游。

道路越多越堵塞

如果数学家设想让商业旅游者上路，不可避免地要考虑交通问题，也得研究车辆堵塞是如何形成的，如铺新道路会产生什么问题。在一些建筑工地还出现了这种令人吃惊的情况：波鸿数学家迪特里希·布拉斯（Dietrich Braess）证明，修一条新路会导致更多的交通堵塞。

他的模型中从 A 村庄到 D 城市有 2 条路，一条经过

房屋 B，一条经过山 C。高峰期时有 6 000 辆汽车从 A 村开往 D 城市。从 A 村到山 C 和从房屋 B 到城市 D 之间的高速公路修得很好，不管车流量多大，都可以在 50 分钟内驶达。从村庄 A 到房屋 B 和从山 C 到城市 D 的路虽然较短，但很窄。如有 1 000 辆汽车在此通过，需要 10 分钟。有 2 000 辆需要 20 分钟。3 000 辆时，为 30 分钟，4 000 辆时，为 40 分钟，5 000 辆时，为 50 分钟，6 000 辆时为 60 分钟。如果一半司机走经过房屋 B 的路，另一半走经过山 C 的路，那么没人能通过选择其他路线时，更快到达目的地。这样就达到数学家所称的稳定状态。从村 A 到城市 D 每人需要 80 分钟。现在交通部长让人修一条高速公路，汽车从房屋 B 到山 C 飞驶只需要 10 分钟。这不是好办法：因为新的高速公路吸引了司机，使得从村 A 到房屋 B 和从山 C 到城市 D 间的交通更繁忙，这使行驶时间变长。而且是所有司机，甚至那些走旧

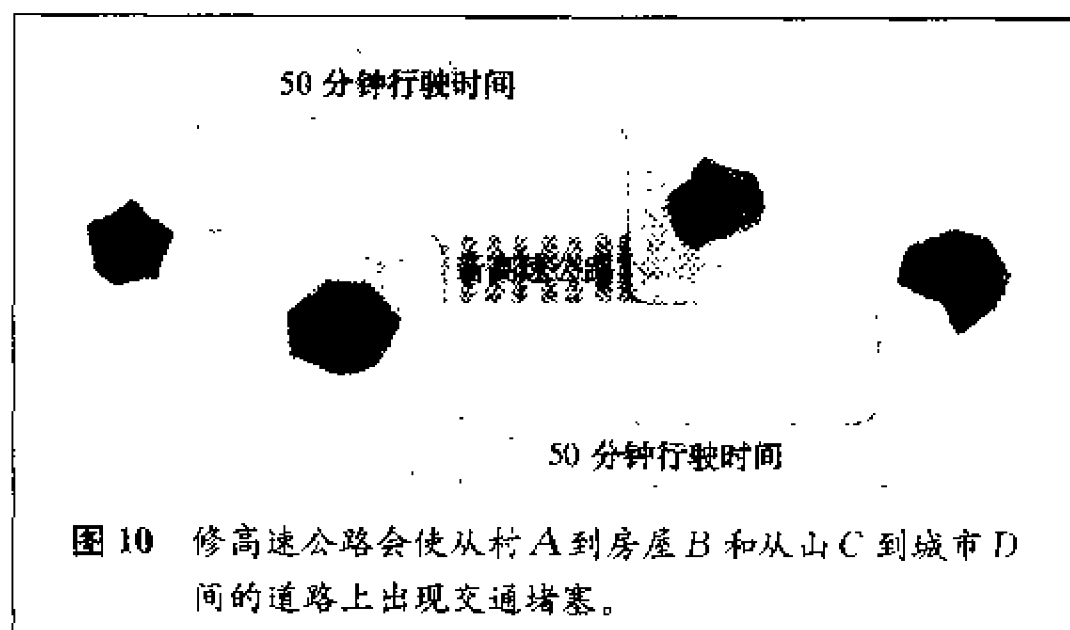


图 10 修高速公路会使从村 A 到房屋 B 和从山 C 到城市 D 间的道路上出现交通堵塞。

路线的司机都往这条高速公路上行驶。原想缓解高速公路的交通设想没有实现，因为所有的司机都需要 50 分钟走完高速公路。而对于想选一条更理想的路线的司机来说，需要 90 分钟，即在途中时间延长了 10 分钟。如果从村庄 A 到房屋 B 和从山 C 到城市 D 的路上有 4 000 辆汽车，那么走完这两条狭窄的路各需 40 分钟。而且没有司机能通过选择另一条路线来缩短行驶时间。

必须承认，这个场景似乎是编出来的。不过用计算机模拟与现实情况接近的红绿灯道路网时证明了这个奇怪的结果。

数 学 游 戏

从数学上来说，布拉斯怪论可以追溯到所谓“被捕者两难”理论，它属于游戏理论。这个由数学家、计算机先驱约翰·冯·诺曼在 30 年代建立的数学分支学科，只是略微研究了这样社会上的游戏，如“象棋”和“不要生气”。冯·诺曼更多的是想打开一条通向经济学的新途径。游戏理论研究那些想追求报酬或想避免受罚的参与者的决策行为，其参与者可以是个人、小组、党派或甚至整个国家。

例如商业旅游者的问题可理解为个人游戏问题：商业旅游者寻找战略，尽可能少走几公里路的方案。而游戏理论中常常会出现相互对抗或合作的现象，例如下面这个例子：

“被捕者两难游戏”使两个共犯面临两难的选择，要



么沉默，要么招供。如果两个人守口如瓶，又没有再多的审讯，他们必须坐 1 年牢。只要其中一个招供了，他就可以作为证人被释放，而他的同伙则需坐 11 年的牢。如果两人都说了，法官会判他们各坐 10 年牢。现在两人都在考虑：如果我的同伙不开口，我不开口就坐 1 年牢；但如果我说了，就可以自由了。如果我的同伙说了，而我没说，我就得坐 11 年的牢；如果我也说了，只坐 10 年牢。因此对两个人来说，开口是最好的策略（只要他们不是在被捕前就已狡猾地商量好了决不开口）。这样他们就要在监狱里待上 10 年。

被捕者的两难处境不仅涉及青年重犯这样的例子，它也表现出了人类，甚至如生物学家所发现的动物一起生活时的痛苦——集体利益和个人利益之间的冲突，从家庭生活直到军备竞赛。在此"沉默"可用"合作"、"开口"可用"自顾自"来代替。

现实世界中活动家通常不是一次，而是多次碰撞对方，例如在生态冲突中。世界海域的捕鱼量年年在变，定得过高，鱼的存量就会降低，渔夫等于自掘坟墓。从另一方面来讲，当然每个人都想尽可能多捕些鱼。弗赖堡的心理学家正在研究这个例子。另外他们让试验者商定虚拟的捕鱼量，然后用计算机推算出对鱼量的影响。

如果多次不断地决定，情况就复杂了，一些现象如信任、惩罚、无私和仇恨，就开始起作用了。数年前美国政治学家罗伯特·阿莱洛特（Robert Axelrod）要求科学家编出"被捕时的多次两难处境"策略的程序。这些程序要



从前一件事的过程算出，是采用了一条强硬的还是软弱的路线。阿莱洛特将寄给他的策略互相比较，得出那惊人的结果。最简单的策略之一“针锋相对”是最成功的。“TIT-FOR-TAT”在德文中的意思是“以牙还牙，针锋相对”的意思。以软弱的路线开始，然后始终选择对手在前一过程中采用的策略，即合作就以合作相对，自私就以自私相对。游戏理论中数学家分析了人类的行为，在公平分配上都是这样，不管是分配社会财富还是蛋糕，起决定作用的，常常是主观的正义感。

如果两人要分一块蛋糕，他们可按分配熟悉的老办法进行：其中一人切蛋糕，另一个人选择，这样就没人会抱怨。操刀的人认为两块蛋糕一样大，而另一人可以选一块他认为大一些的蛋糕。如果两个以上的人分蛋糕时，该怎么办呢？在过去的50年里，数学家找出了几种方法，按这些方法，三个人参加分配，而不会有人觉得受骗。

最简单的方法叫“滑刀”。三人中的一人将刀从左向右慢慢在蛋糕上划一下而不切开蛋糕。只要有一人认为刀刃位置正确，正好可以切下蛋糕的1/3，他就叫“停住”。接着刀继续往下切，将蛋糕分成两块。叫“停住”的人得到较小的那一块，而且对此满意，因为他认为这正好是蛋糕的1/3。剩下的蛋糕就由另两个人按一人切、另一人选的方法进行分配。

虽然在“滑刀”中所有人都认为自己至少得到了蛋糕的1/3，但是可能有人会认为另一个人的那一份大，第一



个叫"停住"的人可能会妒忌他的两个对手中的一个，如果他认为这个对手在分剩余蛋糕时得到了大于 1/2 即整块蛋糕的 1/3 的那一块。能否有方法保证每个参与分配者认为自己的那一份至少和别人的那一份大小相等？数年前政治学家施特芬·勃拉姆斯（Steven Braums）和数学家阿伦·泰勒（Alan Taylor）给出了一种方法，它不是只适用于三个人，而是适用于任意多个人分配时的情况。这也是数学。

公 平 分 配

三个人——阿图尔，贝尔塔，克劳迪亚——使得没人会妒忌别人，他们这样分一块蛋糕：首先阿图尔将蛋糕切成他认为公平的 3 份。现在贝尔塔将他认为最大的一块进行再分，直到他认为它与第二块的那一块一样大为止。其中被切下来的一小块蛋糕被当作剩余的搁置在一边。如果阿图尔切了蛋糕后，贝尔塔认为两块（或三块）一样大，她就什么也不做，接着克劳迪亚可以拿走一块，贝尔塔再从剩余的两块中挑出一块。如果贝尔塔将其中一块切小了，而且克劳迪亚拒绝接受切小后的那一块，那么贝尔塔必须自己拿走那一块，阿尔图得到剩下的那一块。到目前为止还没人妒忌：阿图尔得到他自己切下的完整的蛋糕，他自然认为这是蛋糕的 1/3，



而且他认为另两个人也不可能得到更大一些的蛋糕。克劳迪亚吃了其中的一块，贝尔塔就可以津津有味地吃另一块了。贝尔塔可能会把切下来置于游戏之外的那一块蛋糕，可以通过重复使用这种方法来分配，不会使人妒忌。若四个饿肚子的人坐在桌子边，也可用一种巧妙的方法，使得没有人妒忌别人：阿图尔先将蛋糕切成5份。接下来的分配方法相当复杂。若有五人，阿图尔就要将蛋糕分成9份；六个人时，分成17块。

证　明

在研究中数学家提出新的原理，并加以证明。虽然在科学王国中，每个概念都被准确定义了，但到现在为止，还有一个问题尚未解决：证明究竟是什么？直到19世纪，直观、清楚明白的数学命题都被认为已求证过了。然而许多情况下，纯粹的直观现象会使人上当。例如没人能想像，乃至给出一条上面没有一点可微分的曲线，即一条没有一处是光滑的交织的线条（至少在最早的分数几何的计算机的图像，如曼特尔勃洛集合出现之前没人能做到这点）。但这些数学现象可以被设计出来。

100年前这些人类健全的理智无法理解的例子震惊了整个学术界。法国数学家查尔斯·海米德（Charles Hermite，1822－1901）这样写道："带着恐慌和惊讶的心



情，我避开了在任何一点都永远不能微分的函数这一令人惋惜的伤口。”

在 20 世纪之交前，数学家还试图用更严密的概念来替代看起来有牢固基础的概念。伯特兰·罗素（Bertrand Russell，1872—1970）和阿尔弗兰特·诺斯·魏特海德（Alfred North Whitehend，1864—1947）发表了共 3 册的书——《数学原理》。在这部书中他们将当时已知的数学归结为基本的、不可辩驳的逻辑原理。书里写满了逻辑符号，没有一般的语言。以至于数学历史学家伊伏·葛拉登·儿纳斯（Ivor Grattan-Guiness）将他比作“裱糊纸样的”。

逻辑学家想将任何数学都建立在一个基础上，它就是集合论。

每一集合都惊动人心的事

30 年前，一个幽灵进入了德国中小学：集合论被写进了中学教科书，学生家长对它表示怀疑。因为这个数学理论本身——至少在它出现在学校时——并不神秘，但与其他中学数学知识不同的是，它当时还完全不为父母们所知。

集合论是在没有所谓前提的情况下，建立起来的理论的一次尝试。它所涉及的都是相当抽象的。一个集合只要有元素就行了，至于是什么元素，这是无所谓的。它加一个理想化的集装箱，能容纳所有可能的东西。通过举例可以很容易理解这个概念。我们可以研究联邦议会



议员的集合，一页有字母的集合，宇宙中原子的集合。当然集合也可以包含无穷多个元素，例如质数集合。

数学中表示集合的记号是大括号：如{1，2，3}是元素为1、2和3的集合，{2，3，5，7，11，13，…}是质数集合。集合之间可以互相联合起来：男士的集合与妇女的集合联合起来就成为成人集合。{1，2，3}与{2，3，5，7，11，13…}联合得到{1，2，3，5，7，11，13…}，或相交：男士的集合与联邦会议议员集合相交得到联邦会议男议员的集合。{1，2，3}与{2，3，5，7，11，13…}相交得到的集合为{2，3}。

也存在所谓的空集，即表示什么都没有的集合。如让男士集合与妇女集合相交，就得到了空集，至少当两性人既不被视为男士、也不被视为女人时。这差不多是所有中学集合论所学的所有内容了。而在数学历史中有许多关于集合论的故事。

尽管集合这个概念很普通，但它还是被视为其他一切的出发点。当罗素在集合论中碰到了一个怪论，使他着实为之惊讶。

集合的元素可以是任何东西，即也可是集合本身。例如{1，{1，2}}表示由数1和集合{1，2}组成的集合。罗素就问，一个集合本身是否能作为这个集合的元素。他这样想，茶匙的集合肯定不是茶匙，即这个集合不包含本身。其他非茶匙的集合就不是这种情况了，如汤匙，联邦议会议员，质数等其他所有非茶匙的东西，但是所有非茶匙的东西构成的集合也不是，这样它肯定包含它本身。



另一个让人较少感到的例子是"所有正好可用13个德文词描绘的物体构成的集合"。因为它可用19个字来描绘，它本身也应该是一个元素。如果谁觉得这个结构太突出，可以设想一个图书馆。馆中大部分书籍不可能包含对自己的参阅材料，而所有的目录很可能包含它本身，因为这本目录书也在书架上。

这些不包含本身的集合陷入了类似于理发师——怪论的困境中：理发师克·林格（K. Linge）只替一个村庄中所有不自己刮胡子的人刮胡子，而不替自己刮的人刮胡须。那么谁来替林格先生刮胡子呢？如果他为他自己刮，那是在替自己刮的人刮胡须。我们再假设一个书籍目录，这个目录上只包含所有不涉及其本身内容的书。这个目录有自己的参阅资料吗？没有，否则它就包含了一本涉及本身内容的书了。如果它没有包含涉及本身的内容，这样的目录就成了上面所列的书中的一本了。

回到集合问题，罗素定义了所谓的 R 集合和 M 集合：R 集合是包含自身的集合，M 集合是指 R 集合以外的所有集合。现在出现了一个动摇数学基础的问题：M 是一个 R 集合吗？一方面不是。因为如果 M 是，那么它就必须包含自己，从而包含一个 R 集合。那么 M 不是 R 集合吗？另一方面来讲，也不是，因为否则 M 就包含了本身，可就是一个 R 集合了。

故事很复杂，但后果不好——在这个所有数学的基础集合论中我们遇到了一个内部逻辑矛盾。它对逻辑学家戈特洛勃·弗莱格（Gottlob Frege，1848—1925）的影



响特别大。当罗素设想他的罕有的集合论时，他正在编写2册《算术基本原理》，在书中他完全是以集合论为基础，他痛苦地写道："对一个科学家来说，再没有比当他刚结束论文时，论文的基础却坍塌这件事更糟的了。当我的著作快付诸印刷时，我却由于罗素先生的一封信而陷入了这种处境。"

一个思维敏捷的人该具有什么条件才能检验基础的牢固性呢？罗素是一位显赫的人物，一生中多次得罪过人，或者是由于他反军事的态度，或者是他关于轻率的见解。他的一些同事肯定能分享他对数学的热爱，对于大多数人来说，现实生活就是理想和可能性之间不停的妥协，总是满足于次好的东西。纯粹理性的世界不让妥协，不知道实际的界限，不知道创造活动的限制。这个创造活动，对所有伟大成就从中萌发，不懈追求完美，远离人类的热情，远离令人惋惜的自然情状，一代一代创造了一个有序的宇宙。在这个宇宙中，纯粹的思维就能逗留在现实的家中，至少我们某个高尚的举动可以摆脱现实世界中的无聊生活。

罗素是少数获得诺贝尔奖的数学家之一，但不是因为他在数学方面的成就。因为诺贝尔奖没有设数学这一项。1950年他因他的著作家的贡献而获得了诺贝尔文学奖。由于罗素的奇论，使得最准确的科学的根基内部出现了矛盾，现在正是修理它的时候。经过数年毫无成果的努力，逻辑学家干脆撇开这个问题不谈了，他们一致认为，包含本身的集合不是真正的集合，对罗素来说这一



出路可能是正确的，但绝不是完美的理论。

逻辑的边缘

对逻辑学家来说，事情更多。1900 年来自哥廷根的达韦德·希尔贝特(David Hilbert)，在国际数学大会上的一份引导性报告中，提出了数学界应该加强关心的 23 个问题。其中一个是拟定一个公理和求证规则的系统，所有当时已知的数学都可以归纳在该系统中。凡是可由公理推导出来，而不出现矛盾的东西都被认为在数学方面是存在的——不管它是否能直观地理解。希尔贝特的系统应是“没有矛盾”而且“完整”，即每个命题要么可以得到证明，要么可被推翻。

在 20 世纪初的几十年，还有人在狂热地、可又徒劳地研究这个项目。30 年代初，当时 25 岁的库尔特·戈特尔(Kurt Gödel，1906—1978)触及逻辑学不可动摇的边缘。这位奥地利人认为，每个没有矛盾的公理系统，如算术的公理系统都是不完整的：它包含既不能被证明又不能被否定的定理。虽然数学家绞尽脑汁，也没能证明或推翻某些假设，这对于此前一直坚信逻辑万能的数学界来说是一个痛苦的打击。戈特尔的想法是用这些系统的形式语言来阐述一些虽然是正确，但无法求证的命题，例如：“这种说法无法证明”。“如果这句名言是正确的，就不能对此进行证明；如果是错误的，就可有一个证明”。这表明，这个命题是真的，因为这个系统应该是没有矛盾的。当然戈特尔定律的证明细节相当复杂。

直到今天数学家都还避开戈特尔的“不完整定理”来聊以自慰。他们认为，这种逻辑奇论只是很少出现，在平常的数学中根本不会出现。戈特尔在被任命美国普林斯顿大学的教授，并与同在那里任教的爱因斯坦成了好朋友。在他给其母亲的信中诉苦，他不明白，为什么爱因斯坦的论文完全改变了物理学家的思维方式，而他的却没有对数学家起到同样的效果。60年代戈特尔的“不完整定理”的意义得到了有力的证实：保罗·柯亨（Paul Cohen）证明，希尔贝特23个问题之一的“连续假设”既不能被证明，也不能被否定，按这个假设，实数的无穷尽正好比自然数大一度。当时在加利福尼亚斯坦福大学的29岁柯亨立即乘飞机到普林斯顿去找戈特尔，让这位大师给他的成果赐福。不过当时柯亨不断陷入认为有人在跟踪他的狂想（因害怕被毒死他几乎饿死）。戈特尔拿过柯亨的论文并研究了两天后，才以茶点接待了这位年轻的同行。

虽然在过去的几十年中一再出现逻辑上的不一贯的情况，但直到今天大多数学者表现看来，似乎逻辑学并不存在边缘，研究人员的日常业务一般也未受影响。

证明什么时候是证明

证明中本来不允许运用直观的理解，定理的阐述应该由基本公理一步一步地推导出来。这个逻辑上的严密性在许多笑话中得以体现出来，如乘火车旅行的笑话：一位工程师、一位物理学家和一位数学家乘火车经过苏格



兰，当他们从一只黑绵羊身边驶过时，工程师说："喔，苏格兰的绵羊是黑色的。"物理学家纠正说："苏格兰至少有一只黑绵羊。"数学家认为这句话还是太冒失，说道："苏格兰至少有一只有一侧至少是黑色的绵羊。"

当要寻找新的关系或使观点有说服力时，没有数学家会放弃直觉，甚至在进行严格的求证时数学家也不能完全不凭直觉理解。除了一些基本的命题外，纯粹形式证明会打破各种框框；证明很长，不容易一下子就看明白。因此数学家需要有填补缺口的勇气——当然只是填补那些同行们能接受的那些，因为归根到底，每个数学证明都是一项社会活动：一个证明只有当学术界理解并相信它的正确性时，才能是正确的。

有时新的定理的证明特别复杂。安德莱夫·维尔斯(Andrew Wiles)关于费马定理的论文写满了130页纸。如果对所有的细节加以详细的说明，并加上其他数学家在此之前的论文，可以得到若干本大百科辞典。想控制某个证明步骤是否正确，需要好几年的时间。对所谓的有限群进行分类，全是荒唐的事。这个代数定理的证明是100多位科学家共同努力的结果，惟一认为已完全理解这个定理的人是美国罗特格斯(Rutgers)大学的丹尼尔·戈伦斯坦(Daniel Gorenstein)，他死于1992年，但人们认为这个定理已得到了证明。

长期以来有争论的是那些借助计算机进行的证明：最著名的例子是"四种颜色定理"。1852年英国数学家弗朗西斯·戈特利(Grancis Guthrie)为国王领地地图着



色。他遇到了这样一个问题,为了给任意一张地图着色,至少需要多少种颜料。相邻的州当然要用不同的颜色,经过短时间的思索后,他猜想4种颜色就足够了。与以后124年中他和其同行们一样,未能证明这个猜想。芝加哥大学的肯耐德·阿贝尔(Kenneth Appel)和沃尔夫冈·哈肯(Wolfgang Haken)经过4年艰苦工作,并在计算机上进行了1 200小时的计算后,他们找到了答案。没人能理解一台计算机在1 000多个小时内能计算什么。那么"四种颜色定理"被证明了吗?

伊利诺斯州的邮局用一个特殊的邮戳"四种颜色就够了"来庆祝这个有历史意义的事件,结果这让许多不知内情的收信人感到迷惑不解。而学术界却在激烈的争论着借助电子的帮助而得到的证明是否根本有效。毕竟没人能检验计算机是否作了它该做的事情。阿贝尔和哈肯的工作中,理论部分包含10 000多个个别情况,除作者本人外几乎没人能重新计算过,甚至计算机程序也特别复杂,而且在这本书出版后同行们总是能找到错误,不过这两位作者每次都能很快地更正。几年前数学家思考出了"四种颜色定理"的新的更明了的证明。不过这个证明也借助了电子计算机的帮助,一个中等大小的计算机需要12小时来进行繁琐的细节计算。

在此期间,尽管一些数学家仍有不乐意的感觉,但计算机证明还是在很大程度上得到了肯定。从"四种颜色定理"以来,计算机也能对其他几个定理进行证明。数学家们让若干计算机用不同的程序进行证明,以此来将



错误的可能性降到最低点，不过人类的大脑不能直接控制计算机的工作。有些命题也许不能只借助笔和纸进行证明，阿贝尔和哈肯写道："我们相信有的著名数学定理只能借助计算机来证明。"不过直到今天，也还不知道是否存在这种定理。如果存在，"四种颜色定理"是否是其中的一个。

20世纪的形式主义使逻辑结论进一步机械化，从而使用计算机从事数学研究基本上成为可能。40年来信息学家一直在研究"自动化证明"。1996年终于做到了：一台计算机第一次对一个数学家花了几年时间失败后的问题成功地进行了证明。芝加哥亚贡纳（Argonne）国家实验室的比尔·麦克柯纳（Bill McCune）和他的同事们编写的EQP程序在8小时内解决了代数中所谓的"鲁宾斯问题"（Robbins-Problem）。

和"四种颜色定理"情况不同的是，数学家可以熟练地完成证明，只费了几张纸。不过工作起来很累，因为计算机完全形式地从公理推出了所需的阐述，中间没有直观易懂的解释。所以柏林洪堡大学的贝尔恩德·英戈·达恩（Bernd Ingo Dann）自己编了一个将计算机证明转化为人可写出的数学文章的程序。

将来计算机是否会使数学家失业还很难说；因为到目前为止计算机只是被用在特殊的分支领域，将问题详细地进行了形式化，而这种形式化只在数学中的少数领域中可以想像。如鲁宾斯的问题等于是一个高水平的组合分析的拼图游戏，计算机尝试了所有可能的证明方法。



但这和数学理解却没有任何关系。因此在不久的将来，大部分数学论文还会研究人间的逻辑学，紧跟其后进行计算机检验是完全可以想像的。

美国数学家约翰·密尔诺(John Milnor)预言，两代人以后，某个证明只有计算机检验过后，才是正确的。他的话可能会是正确的，因为正如过去那样，随着时间的变化，人们对某个命题何时可以认为是被证明了的想法，也在改变。

数学无处不在

两个人乘气球迷失了方向，看见地上有人时，他们便问："您能不能告诉我们，我们现在在哪里？"地上的那个人坐下来开始思考，半小时后回答道："在气球吊篮里。"于是气球上的一个人对另一个人说："这个人肯定是个数学家。""你怎么会这么认为呢？"另一个人回答道。"首先他过了很长时间才回答，其次他的答案绝对正确，最后他的回答根本没什么用处。"

数学家真的只是不谙世事胡思乱想的人吗？绝对不是。数学绝对是最关键的科学，没有数学就没有计算机，就没有电视机，就没有汽车，没有供电，没有X射线仪器……每一项技术都用了数学。尽管通常在成品中无法看到数学的运用，但在解决各个问题时，须使用数学。但有谁会在他上车时想到控制发动机和催化净化器间的等式？谁完全知道激光唱片运用了具体的数学知识？显然迷路的热气球探险者不知道这些。此外：为什么这个小伙子不带一颗卫星定位仪，即一个有电子和数学组成的小盒子。

科学的最大优越性正是它的抽象性，不管涉及的是新的水力发电厂，轻型飞机，婴儿尿布，还是金属的浇注，出现的等式都是相同的——因为总有东西在流动。数学



家不大关心涉及的是水、空气、铀，还是液态金属。对他们来说，公共汽车的路线、运输垃圾、工厂的生产组织和计算机的芯片的图形，都是相似的：每次都要将连接路程最小化。数学方法能转用到许多实事上去，使得每代人都能以前辈的知识为基础去工作，如收音机、电视机和录像机，都可以追溯到古希腊时代：在古希腊罗马时代数学家就开始研究震动的弦了。拨动小提琴的弦就等于是让它发生形变。如果弦被拨回，它就会加快回到拨动时的初始位置。这样它来回震动，直到因为摩擦而减速，最后停止。在某一时刻，弦的形状是怎样的呢？1748 年瑞士数学家莱昂哈德·奥伊勒(Leonhard Euler)得出了描述琴弦形变的"波的等式"，它是物理学家麦克斯韦(James Clark Maxwel，1831—1879)等式的前身。这个公式包括电场和磁场的力学线。通过这个公式数学家认识到，电磁波是以光速向前传播的，而且光本身也可理解为电磁波。

没有这个思维上的准备工作，想发明收音机将是一项会判定失败的项目，没有人知道该如何着手。技术进步总是由简到难。只有借助于数学，才能传播经验：小提琴琴弦与录像机可又有什么共同点呢？难道这不仅仅是技术的基础，即数学的一部分吗？有没有一种与现实毫无关系的所谓的纯粹数学？当然许多研究人员都只顾工作，不考虑具体的运用。即使古希腊研究琴弦振动时也肯定没想到过电视机。

虽然实际上数学家研究出的东西只有一部分得到了



运用，关键的问题是今后哪些理论会有实际意义？这个行业的人喜欢应用丹麦物理学家尼尔斯·波尔（Niels Bohr，1885--1962）的一句名言："预言很困难——特别是关系到未来的时候。""如历史所示的那样，许多纯以运用为目的的研究已经过时了，而出于纯粹的数学原因而形成的理论都得到了意想不到的运用。"波恩的马克斯-普朗克数学研究所的葛尔德·法尔廷斯（Gerd Faltings）这样评论说。他的英国同行伊恩·斯蒂瓦特（Ian Stewart）补充道："好的主意很少，但其中来自对数学内部结构的富有想像力的主意，至少和处于解决实际问题的主意一样的多。"

看起来似乎抽象的理论总是在数十年后得到了运用。如通过计算机层面X射线照相术氡的转换，布尔代数作为计算机的开关逻辑，或物理及电子学已无法摆脱数学上的复数。

另一个例子是数论，虽然它一般不能用于实际，但是学者们从古希腊罗马时代起就被它深深吸引住了。数年前数论就开始被用于破译电子信息的密码。令人吃惊的是，用大量的数字进行的看起来似乎无用的计算，做成了一笔数百万元的生意：可用大量数字来防止未经许可时在使用因特网者，例如在因特网上通过电子邮件使用信用卡采购商品。

密码学的例子

破译密码的科学——密码学，一直是数学家的领域。

据说恺撒为了和一位统帅进行联络，运用了一种密码，将每篇文章的字母用字母表中该字母后的第三个替代。当文章较长时，敌人很容易破译这个密码，因为字母常在不同的地方出现。在德语文章中出现的频率最高的字母很可能是“e”，找到了它，就可以找出出现频率第二高的，渐渐地破译出整篇文章。借助计算机可以在几秒钟内破译更长的文章。

如果将字母表中的字母不是按固定的间隔后移，而是任意变动的，这个密码就难破译了。为此发件人和收件人需要有相同的随机顺序，随机数表示的是写成密码的字母与初始信息之间的距离。冷战时期双方的间谍都采用了类似方法。正如英国科学杂志《新科学家》所发现的那样，苏联秘密警察多次运用了同一随机数，这不仅导致有关军官被枪毙，而且还揭露了间谍克劳斯·福克斯(Klaus Fuchs)、尤利斯·罗森贝克(Julius Rosenberg)和埃德尔·罗森贝克(Etyl Rosenbert)。二战中德国人非常信赖一台名为 ENIGMA(希腊语意为秘密)的解码机，它由一个键盘和三个转动的滚筒组成，滚筒的位置决定输入的字母是如何译成电码，通过更换滚筒和滚筒之间的位置可以调节出数百万个电码。

英国召集了一批专家来破译这些密码。这个行动的领导人是数学家亚兰·杜林(Alan Turing，1912—1954)，他现在被视为理论信息学的创始人。英国人装了一台滚筒机来把德国的密码回译成文，并试图找出每天都在改变的 ENIGMA 的基本位置。为此他们将文章



缩为在翻译过程中推测出来的关键词。如果专家们认为消息的开头是天气预报，他们就找出滚筒在那个位置可以得到雾或雨之类的单词。这样他们经常很快就能破译密码，并向总参谋部提供关于敌方活动的非常有价值的情报。这给盟军带来了巨大的好处，而德国人还是认为他们的密码无法破译。

在以往的译密码的方法如 EINGMA 的破译方法中，一条信息的收发双方都知道是密码，发信息的人用密码将要告知的内容转化成难懂的语言，收信息的人再将它译成原文。而现代最重要的方法之一，即以麻省理工学院的三位创始人罗纳尔德、阿迪和莱昂哈德的姓名的第一个字母命名为 RSA(Ronald Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman)，方法是不对称的：发信息者可用密码，将信息译成密码，而他却不能将一条已译成密码的信息转换成明码文本。为此他需要第二套密码。这个密码只有收方才有。因此在这种系统中，某银行可以公开密码。这样它的顾客可以以电子方式传递加密的信息，而偷听到信息的人却无法破译。因为只有银行才知道这第二套密码，可转换成有用的信息。RSA 方法是以此为基础，虽很简单，即把两个质数相乘，但很难由它们的乘积推回出其因子。计算机可以在一瞬间求出两个 40 位数的乘积，与此不同的是，即使用最快的电子计算机，也很难将一个精心挑选的 80 位数拆成它的因子，发信息的人用乘积引用密码。解码时接受信息者要知道这两个因子。



然而使用RSA方法的人要冒着很大的风险：因为知道今天数学家还未找到一种方法，可将大数字拆分成他的因子。万一哪天这个方法被找到了，那么所有用RSA方法加密的信息都会很快被别人破译出来。

对技术厄运的共同罪责

因为每种技术都是以数学为基础的，所以数学也必须对因为技术而产生负面的现象负责——大规模毁灭性武器，全球环境污染，被监视国家的危险，人与人之间的关系淡化，晚上都在看电视，自动化导致失业。此外批判家还提出警告，由于计算机的普及而导致思维机械化，技术将它的是非逻辑强加给我们，而这个逻辑来源于数学，人类的生活由此变得悬殊多样。

而且今天数学还渗透进了整个自然科学，并不断还在向人文科学进军，由此影响人的思维方式。因此从原子物理到基因技术，人们可以对数学那些令人怀疑的成就负责。

由于数学具有高抽象性，因此几乎无法看出结果将会怎样。公式不会关心所涉及的是武器系统还是民用系统。例如曼哈顿工程中研究原子弹时，数学家想出了蒙特卡洛方法，今天这种方法在许多方面得到运用。如用于天气预报的计算，或汽车工业调节汽车安全的碰撞模拟测试，甚至这个听起来似乎没有过责的游戏理论，也被运用在军事中了，冷战时期数学家用它来研究策略。

学者喜欢将他们的理论说成是毫无危害的，例如所



谓的“结婚定理”并不是为婚姻介绍所，而是为军队研究出来的。这个定理涉及的是对象的归类：有几位女士和几位男士。每位女士在男士中都有几个朋友，结婚定理规定了这样的标准，即每位女士何时与她的朋友中的一位结婚 即每位女士只有一个丈夫，当然也没有哪位男士同时娶两位女士为妻。如果将女士替换成城市，先生替换成轰炸机，“和 X 先生交朋友”被换成“能被轰炸机轰炸”，结婚定理就失去了魅力。

数学作为文化

数学家几乎不能控制他们的论文，一旦可能会被用在什么地方，大多数人对此也根本不感兴趣。“主要目标不是运用，而是创造文化”，埃森实验数学研究所的格哈得·弗赖(Gerhard Frey)这样解释说。

数学因其彻底有效吸引着人。一旦被认为是正确的就永远是正确的。2 乘以 2 永远都等于 4，不管在古代还是在未来三角形内角和都为 180 度，还有哪种科学能承认自己具有这种延续性呢？英国数学家戈德弗赖·赫·哈代(Godfry H. Hardy)说：“当埃基洛斯(Aischylos)早被人遗忘时，人们还会记得阿基米德。语言会消失，但数学观念不会消失。”

除了永恒气息外，纯粹的数学家还作出新的定义和猜想，特别是找出证明，世界是什么在活动。为此首先需要的是关于如何进行论证有创意的想法。虽然没有人会在灵感出现后，只是将证明一行一行写下来，但如果直觉

正确，剩下的事或多或少都只是例行工作。进行思考，直到出现天才的灵感，这是数学家梦想中的东西。

据说哥廷根人达韦德·希尔贝特(David Hilbert)在20世纪初曾经这样谈过他的一位成为作家的学生："我从未相信他具有一个数学家应有的创造性。"

戏剧愿与艺术相比，英国作家哈代(Hardy)对此写道："数学家的作品肯定和画家或诗人的作品一样美。数学概念一定和颜色或文字一样和谐。美是首要的检验：世界上没有丑陋数学立足之地。"然而什么叫美可没有明确定义，局外人士很难理解，在拜罗伊特(Bayreuth)大学教数学教学法的彼得·巴勃蒂斯特(Peter Baptist)甚至认为，即使是非数学家也可享受数学的美："就像一个艺术或音乐外行喜爱凡高的画或贝多芬的交响乐一样。"不过对此必须进行智力投入。

欧几里德关于质数无穷大的证明，或七巧板对毕达哥拉斯定理的证明，或下列的一般计算题都介绍了数学的美。在一次拳击比赛中有32个队，会有多少赛事？现可将各次参队计算。除了取胜队外，每一队正好输掉一次，共计会有31场比赛。这一思考对其他数目队伍的比赛都同样可解决所提的问题。

数学究竟讲的是什么

学术界大部分人常引用希腊哲学家柏拉图的话，他认为数和其他数学研究的对象都是美妙的理想，存在于空间和时间之外的一个理念世界。柏拉图主义认为数学



真理与人类没有关系，例如存在无限多的质数事实始终是真实的，而且今后也还是真实的。欧几里德发现了它，就像哥伦布发现美洲大陆一样。对纯数学一般通常理解是其代表人士具有通向上帝思想，通向绝对真理的直接渠道。

在加拿大的卡尔加莱(Calgary)大学的瓦莱纳·荷贝-迪森(Verena Huber-Dyson)说："大多数数学家在处理事情和谈论时，似乎在对于建立宇宙的物体作研究工作。"并说，"我自己也是这样的。因为从事数学研究比探讨它的哲理要容易得多。"在美国亚尔勃奎格(Albueque)一所大学的罗宾·赫尔希(Reubin Hersh)对于这种思维惰性讽刺道："我将与一条逆流而上的鲑鱼相比。它知道该如何逆流而上，但却不知道他在做什么，为什么要这么做。"赫尔希认为，数学既不存在于观念世界中，也不在某人的大脑里，他既不具有物质性质，也不具有精神性质，而是具有社会性质，"如果法律、宗教、货币一样，是文化的一部分，历史的一部分"，它存在于人类集体的意识中。正如柏拉图主义者所说的，数学不是由科学家发现的，而是由他们发明的。

爱因斯坦早就认为："显然所有的数都是人类智慧的发明物，是一个自己发明的有助于整理感官经验的工具。"史坦尼司拉斯·旦哈纳(Stanislas Dehaene)准确说明了这个命题：因为我们生活在一个可相互区别的运动物体的世界里，所以我们需要数字。在我们周围认出这些数可以帮助我们寻找猛兽的足迹、选择最好的饲养场



地。这位在巴黎桑特国家研究院研究数学的年轻数学家、神经心理学家说："对我们来说，就像超声定位对于蝙蝠、或歌唱对于鸣禽一样，是十分基本的事情，整个数在我们的神经系统进化中深深扎根，这样就能将数学刻在我们大脑的结构上。"

作为证明，旦哈纳对数百例试验，已指出婴儿乃至兽类都显示具有不完全的计算能力。五个月的婴儿，当看到眼前有两只米老鼠玩具在一把伞后跳动，但把伞放在一边，只有一只米老鼠在那里时，他会愤怒地注视着。如果放上糖果，黑猩猩显出惊人的计算能力。在一个托盘中放上两堆巧克力糖，一堆 3 块，一堆 4 块。在另一个托盘中放上巧克力糖，一堆 2 块，一堆 3 块。黑猩猩有目的地选择那放 7 块的那个托盘，看来黑猩猩知道 3 加 4 大于 2 加 3。猕猴和狨在这试验中，如不用巧克力糖，改用茄子，也有同样的表现。甚至老鼠也会作简单的计算。科学家把杠杆 *A* 与两种音响或闪光装置联在一起，杠杆 *B* 与四种同类装置联在一起。当老鼠听到 2 次音响，看到 2 次闪光，就会按压杠杆 *B*。

在研究大脑受伤，失去了基本数学能力时，旦哈纳和其他的科学家能将我们大脑中计算机器定位。它位于脑皮层上的某处，所谓的下丘脑皮层。视觉、听觉和触觉都集中在脑皮层中。也许这个——到目前为止还很少探究过——部位是负责加工语言，区分左右。用健康的人进行实验时，即在他们心算时，测量他们的大脑渗血量，得到的结果是，大脑皮层的这个部位负责处理数字。因



此数学并不是柏拉图式的理想，而是神经的创造，是大脑用于理解世界的方法。旦哈纳能将此与颜色比较。这也不在我们大脑之外的事。香蕉在我们看来是黄的，但当它在不同的光照下反映其波长之时，却会完全改变。在超出简单的计算之外的乘法、三角学或微分学，认知科学家把其视为人类文化事业。我们用较少的话在语言中阐述语法、句法、文学及诗歌。以同样的方式我们从简单的理念建立了整个数学。

美国加利福尼亚大学贝克莱分校的乔治·拉柯夫(George Lakoff)与拉菲尔·努纳斯(Rafael Nunez)更进了一步。拉柯夫认为："我们不仅有数学大脑，而且有数学身体。"他说："第一个证据是十进制。我们的祖先在玩他们的10个手指时发现了数字，后来他们又注意到，可以通过计数步伐来测量距离。也许在这个过程中他们遇到了更抽象的概念：向其中一个方向走表示正数，向另一个方向走表示负数。如果向垂直方向走去，就产生第二根轴，即今天我们称之为坐标系统。这样数学高塔就逐步建立。拉柯夫和努纳斯深入研究了许多数学概念，其中有对数、三角学、复数、分数几何等等。他的结论是：不存在纯粹的思想，一切都是以物质行为为基础。例如群论：群中的基数式在室内的椅子，在我们的头脑中的表象是相同的。

柏林自由大学的埃尔哈德·贝伦斯(Erhard Behrends)却认为经验只占了数学光谱的一小部分，例如基本概念之一的无穷大在现实中没有与之相对的东西。

"自然科学中正是由经验得出的抽象概念帮了我们。"这位数学教授说。牛顿惯性定律，即运动的物体会永远运动下去，著名的1千克羽毛与1千克铅块下落时的速度一样的结论，光速的绝对速度限度，这些都不太适合我们对日常世界的理解。

牛顿定律、相对论和量子力学并没有为生存提供直接的好处，后者甚至与我们的经验毫不相关，因此很难理解。为什么进化会使我们想出隐藏的数学呢？对于这个问题甚至新的立论也没给出令人满意的答案。然而这些公式很可能是人想出来的，而不是上帝赐给的。因为它们对宇宙的理解，只是在我们可以通过观察和试验的范围之内。他们并没给出客观真理，而是与人类能力所及有关的真实性。也许天外人士会有另外的自然规律。

柏拉图学派人士认为：凡是有高智慧的物种肯定发展着与我们同样的数学，因为他们虽不依靠人类独立存在，却须从同一理念世界有所创造，一旦与异己的人类接触，也许能解决柏拉图观点的争论。如果在遥远星球上的生命实体能有另一种数学，柏拉图观点就会被驳倒。如果他们也知算术、微分学和集合，也许不是这样去称谓。如果他们生活在与我们同样的环境中，他们由于自然选择淘汰，也会使思维器官具有同样的能力。如果他们在一个水的世界中发现，根据旦哈纳的说法，对水流及漩涡有所了解，"在此情况下，他们的数学会和我们的数学大相径庭"。



奇 迹

伽利略曾写道："宇宙总是在我们眼前，哲学就被写在了宇宙这本伟大的书中。但是如果谁在此之前没有学过书中的语言，没有熟悉写成这本书的字母，那他是不能读懂这本书的。这本书是以数学语言写成的，它的字母是圆、三角形和其他几何形状，没有这些人类就一句话也看不懂，没有这些人类就会在黑暗的迷宫中迷失方向。"

至今为止没有哪个自然科学家反对这一点，不管是牛顿定律、量子力学还是相对论，这一切都以公式为基础。但为什么世界会听从于数学定理呢？这个问题似乎可以算得上是无法解释的秘密之一了。1960 年美国数学家、物理学家欧根·维格纳(Eugene Wigner)就写道："数学语言适于表达物理定理这个奇迹是个美好的礼物，我们既不能理解也不应得到这份礼物。"直到今天这一点也没怎么改变过。

附　录

术语释义

代数学(Algebra)

它原本是等式及其解的理论，现在它是一般研究已定义的数学对象之间的联系。代数学的基本任务是求所谓的代数等式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的解，其中 a_0、…、a_n 是已知实数或复数，x 为未知数。根据代数学基本定律，每个代数等式至少有一个复数解。

证明(Bewies)

它是数学研究的关键。因为在专业界中，新的定理只有当它被逻辑规律准确证明后才是正确的。求证时，数学家由已知基本假设和已证明的定理--步一步推断出新的普遍有效的定理。

十进制(Dezimalsystem)

由 10 个数字 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 构成的常用数字系统。



微分计算(Differentialrechnung)

它是数学中重要的研究变化率的分支学科。若将一条曲线进行微分，可以得到曲线上每一点的斜率。如果 f 是某函数，即数的归类，那么对于每个实数(或复数)x 在 $f(x)$上都有一个实数(或复数)与之相对应。然后当 h 趋近 0 时，$[f(x+h)-f(x)]$ 除以 h 得到极限值，即 f 的图象在点 $[x, f(x)]$ 的斜率。

二进制(Dualsystem)

只识别 0 和 1 的数字系统，计算机用二进制处理数字。

欧几里德几何学(Euklidsche Geometrie)

欧几里德几何学是中学几何。它研究的是直线、平面和圆。古代欧几里德提出了 5 项基本假设，即所谓的公理，欧几里德几何学就是以它为基础建立的。若没有第 5 个公理，即“平行公理”，就可以定义两个“非欧几里德几何”了。

阶乘(Fakultät)

它是所有小于或等于已知数的自然数的乘积。阶乘简写为!。例如 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$。

费马定理(Fermats Theorem)

关于某些等式可解性的数论定理，这些等式在经过

了 3 个世纪的深入研究后，才在 1994 年得到证明。这个定理认为，等式 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n \geqslant 3$ 时，没有正整数解。

函数(Funktion)

函数是数之间的对应关系，例如函数 $f(x) = x^2$ 将数与它的平方相对应。

分数几何(Fraktale)

它是非直线几何图形，有无穷缠绕的奇怪的小图形构成，它具有本身相似性。图中总是出现不同比例尺的同一图形。

几何学(Geometrie)

数学中研究直线、平面和立体，以及其大小、形状和位置的分支学科。几何学是空间数学。

图像(Graph)

一个函数的图像是 x 取所有允许的连续值时，所有点[x, $f(x)$]的集合。例如函数 $f(x) = x^2$ 的图像是抛物线。

极限值(Grenzwert)

无穷多个数 a_1，a_2，a_3…组成的数列越来越接近于 g 时，即在 n 足够大时 g 与 a_n 之间的距离为任意小，这



些数收敛于极限值g。例如：数列1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$…收敛于极限值0，因为它的项为正数而且越来越小。

基本计算方法(Grundrechenarten)

四种基本计算方法为加、减、乘、除。

虚数单位(Imaginäre Einheit)

它是－1的平方根。因为每个实数的平方不为负值，所以以i表示的虚数单位不是实数。复数就是在此基础上建立起来的。

积分计算(Integralrechnung)

这是微分计算的反对应。将一个函数导数的积分又得到函数本身。函数的积分决定它的图形与x轴之间的面积。这个面积可由一系列越来越细长相互靠近的矩形面积求得。

复数(Komplexe Zahlen)

它是实数的扩展。为了能解等式如$x^2=-1$，设想出了带虚数单位i的新数，这些数的平方可以为负数。

坐标(Koordinaten)

它是表示空间上(或平面上)点的位置，借助坐标可将几何问题转化为数，并通过计算来解决。反过来，也可

使数字问题更直观。平面中坐标常用(x, y)表示。其中x表示某点从一侧向离零点的距离，y表示该点在零点上或下的距离。例如点(2，3)表示位于零点右2个单位，零点上3个单位的点。数标系常用数轴表示。其中x轴为水平，y轴为垂直。三维空间中又加有第三根轴，即z轴，它与另两轴互相垂直。因此空间上某点的坐标由3个数(x, y, z)表示。

圆(Kreis)

平面上封闭的线，这条线由所有与某固定点，即圆心的距离相同的点构成。半径为r的圆面积为πr^2，周长为$2r$。

集合(Menge)

它是数学基本概念。一个集合是将任意东西(它的元素)集合为一个整体，如一页纸上的字母集合，数1，2，3，4的集合或整数的(无穷)集合。

自然数(Natürliche Zahlen)

即正数1，2，3，4…

Pi/π

表示所有圆的圆周与直径之相同比例。Pi或π乃一无穷序不循环出现的数列。



幂(Potenz)

表示相同因素的乘积,如 2 的 3 次幂为 $2^3 = 2\times2\times2$。

质数(Primzahlen)

大于 1 且只能被本身和 1 整除的整数。

有理数(Rationale Zahlen)

有理数由所有整数和所有整数的分数组成。

实数(Reelle Zahlen)

实数由有理数和正有理数的平方根组成。

斜率(Steigung)

直线的斜率表示该直线在坐标系中有陡度,定义为直线上两点之间的高度差与其水平距离之间的比值。曲线在一点上的斜率是在这点上"切线"的斜率。

概率论(Wahrscheinlichkeitstheorie)

数学中研究随机情况的分支学科。 件(偶然)事件的概率是 0 至 1 之间的一个值,它表示这件事出现的频率。

根(Wurzel)

一个数 a 的 n 次根是数 b,它的 n 次幂为数 a,表示为 $a^n = b$(其中 n 表示某个正整数)。

数论(Zahlentheorie)

数学中研究自然数,特别是它的可分性的分支学科。



其他文献

作为了解数学家的精神和生活世界，其合适文献有——

阿勒布莱希特·鲍宇厄勒施巴赫(Beurelspacher，Albrecht)：《我在数学世界里显得越来越无能》(In Mathe War ich immer schlecht)。维威克出版社(Vieweg)，不伦瑞克/威斯巴登(Braunschweig/Wiesbaden)(黑森州首府)1996年出版。

古森(Gießener，地名)的数学教授鲍宇厄勒施巴赫，不需要用复杂的公式和挖空心思想出来的证据，就能够成功地将读者引导深入到他的专业领域中去。

费利浦·姬·戴维斯(Daivis，Philip J.)和赫希·罗伊本(Hersh，Reuben)：《数学入门》(Erfahrung Mathematik)，比克豪斯出版社(Birkhäuser)，巴赛尔(Basel)1993年出版。

数学大师一个类似的提纲，且以无可比拟的苛刻要求来探寻研究。此书适用于那些从事该数学专业的初学者。

许多书籍中以科普形式来描述挑选出来的数学理论，并添加了很多有趣的历史轶事。值得推荐的书籍有——

皮尔·巴希奥克斯(Basieux, Pierre)《冒险家--数学》(Abenteuer Mathematik),rororo出版社,赖贝克(Reinbek)1998年出版。

凯特·戴维林(Devlin, Keith):《现代数学的星辰》(Sternstunden der modernen Mathematik),德国袖珍图书出版社(dtv),慕尼黑(Muenchen)1992年出版。

威廉姆·顿翰(Dunhan, William):《从A至Z的数学》(Mathematik von A bis Z),比克豪斯出版社(Birkhäuser),巴赛尔1996年出版。

康拉德·雅各布斯(Jacobs, Konrad):《Ⅰ和Ⅱ的结果》(Resultate Ⅰ and Ⅱ),维威克出版社,不伦瑞克/威斯巴登(Braunschweig/Wieshaden)1987年和1990年出版。

这四本书全部都要求读者从一个角度或者换另一个角度来一起共同思考一些问题。

提供历史方面的介绍——

多米尼克·奥利瓦斯特罗(Olivastro, Dominic):《中国的三角形》(Das Chinesische Dreieck),二千零一出版社(Zweitausendeins),法兰克福(Frankfurt)1995年出版。

本书副标题为《一万年来最难解的数学之谜》,一个要遵循的许诺是,如果此书内容比较混乱的话,可把它作为对历史感兴趣的读物。



数学作为描写大自然的语言——

伊安·斯德瓦尔特(Stewart, Ian):《自然的数字》(Die Zahlen der Natur),光谱学术出版社(Spektrum Akademischer Verlag),海德堡/柏林(Heiderberg/Berlin)1998。

这位英国的数学教授在此书中生动地描写了所涉及到的专业领域,而且完全不用公式。

配有图解说明的最佳书籍是——

约翰·赫·康韦(Conway, John H.)和理查德·凯·盖伊(Guy, Richard K.):《数字魔术》(Zahlenzauber),比克豪斯出版社(Birkhäuser),巴赛尔1997年出版。

该书吸引人们在所有著名的数群中遨游,从自然数到超复数。

西蒙·辛格(Singh, Simon):《结束句的符号》(Fermats letzter Satz),汉瑟出版社(Hanser),慕尼黑/维也纳(Wien)1998年出版。

该书叙述了最著名的数学之谜,从古代罗马时期的数学根号到安德鲁·威勒斯(Andrew Wiles)新时期的证明。在阅读过程中出现一张英雄人物的彩色图片,他是在350多年后最终解开谜底的人。

[General Information]
[illegible]=[illegible]
[illegible]=
[illegible]=115
SS[illegible]=10421864
[illegible]=

